EXPOSICIÓ INTUITIVA DEL TEOREMA DE BAYES

Joan Casulleras

El teorema de Bayes és actualment (1979) el punt final de l'estudi de les probabilitats al C.O.U. i sovint constitueix un escull considerable per als alumnes que hi arriben amb les presses freqüents al darrer tema del curs, siguin quins siguin el curs i el tema. Moltes vegades hom salta aquest escull aprenent de memòria la fòrmula amb els grans perills que comporta la dansa de probabilitats compostes i condicionades que hi figuren.

Hem tractat de resoldre els problemes de probabilitats de les causes de manera directa, amb un gran èxit aparent i tots els alumnes han resolt els problemes que se'ls han presentat, però no estic prou convençut de l'oportunitat d'explicar-ho així. Ho exposo tot demanant-vos que ho experimenteu i digueu quina conclusió en traieu.

PROBABILITATS CONDICIONADES

Una experiència consta de dues parts: una primera prova P amb els possibles resultats A i $\bar{A}$, de probabilitats $p(A)$ i $p(\bar{A})$; després es fa una prova Q condicionada a P, amb els possibles resultats B i $\bar{B}$. Si s'ha esdevingut A, la probabilitat de B és $p(B/A)$ i si s'ha esdevingut $\bar{A}$ la probabilitat de B és $p(B/A)$; igualment, les probabilitats de $\bar{B}$ són $p(\bar{B}/A)$ i $p(\bar{B}/\bar{A})$.

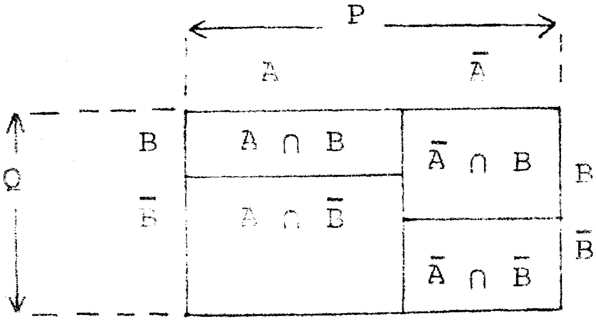

fig 1

Si representem pel segment P la prova P i pel Q la prova Q , la prova composta per P seguida de Q es podrà representar pel rectangle $P \times Q$.

Suposem que A i $\bar{A}$ són esdeveniments complementaris i incompatibles; es compleix , doncs,

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Suposem també que B i $\bar{B}$ són complementaris i incompatibles i $p(B/A) + p(\bar{B}/A) = 1$; $p(B/\bar{A}) + p(\bar{B}/\bar{A}) = 1$. Llavors els esdeveniments $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ vénen representats pels quatre rectangles de la figura 1 i les seves àrees, mesurades amb l'àrea del rectangle $P \times Q$ com unitat són les probabilitats de cada esdeveniment:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B/A) \quad ; \quad p(A \cap \bar{B}) = p(A)p(\bar{B}/A)$$

$$p(B \cap \bar{A}) = p(\bar{A})p(B/\bar{A}) \quad ; \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A})p(\bar{B}/\bar{A}) \qquad [*]$$

EXEMPLE I : Tenim dues urnes amb cinc boles cadascuna. L'urna M conté dues boles blanques i tres boles negres; l'urna N conté 4b. blanques i una bola negra. Tirem una moneda i si surt cara traiem una bola de l'urna M , si surt creu traiem una bola d'N . Probabilitat de treure bola blanca.

L'experiència completa consta d'una prova P que pot presentar els esdeveniments A (cara) i $\bar{A}$ (creu) amb probabilitats $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$; la segona part és una prova Q que pot presentar també dos esdeveniments, B (bola blanca) i $\bar{B}$ (bola negra).

Les probabilitats de B i $\bar{B}$ són condicionades al resultat de la prova P. Si s'ha produït A és $p(B/A) = \frac{2}{5}$; si s'ha produït $\bar{A}$ és $p(B/\bar{A}) = \frac{4}{5}$. Això es tradueix en la representació:

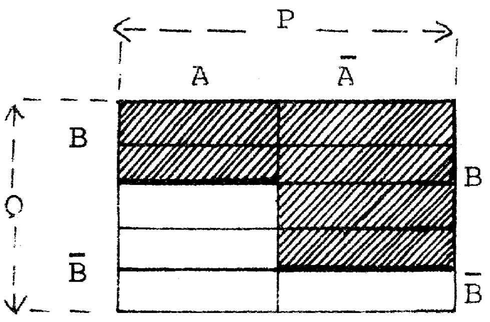

fig 2

L'esdeveniment "bola blanca", és a dir B , apareix com reunió de $A \cap B$ i $\bar{A} \cap B$

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

que corresponen a la part ratallada de la fig. 2 . Les probabilitats són

$$\left.\begin{aligned} p(A \cap B) &= \frac{1}{2}\,\frac{2}{5} = \frac{2}{10} \\ p(\bar{A} \cap B) &= \frac{1}{2}\,\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \end{aligned}\right\} \; p(B) = \frac{6}{10}$$

En aquest problema, particularment senzill, els casos possibles igualment probables vénen representats per els deu rectangles iguals en què s'ha dividit $P \times Q$. Hem pogut sumar les àrees de la representació dels esdeveniments $A \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ sumant els nombres dels rectangles que els representen: $2 + 4 = 6$. Si els rectangles no fossin iguals també sumariem les àrees corresponents, que s'expressarien amb fraccions de diferent denominador.

<u>EXEMPLE II :</u> Tenim una urna M amb 3 b. blanques i 5 b. negres; una altra urna amb 2 b.b. i 8 b.n. Tirem un dau i si surt un 1 o un 2 traiem una bola de M ; si surt 3,4,5 o 6, traiem una bola d'N. Probabilitat de treure bola blanca.

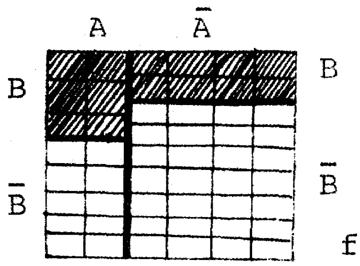

fig 3

$$p(A) = \frac{2}{6} \; ; \; p(\bar{A}) = \frac{4}{6}$$

$$p(B/A) = \frac{2}{6}\,\frac{3}{8} = \frac{6}{48} \; ; \; p(B/\bar{A}) = \frac{4}{6}\,\frac{2}{10} = \frac{88}{60}$$

$$p(B) = p(B/A) + p(B/\bar{A}) = \frac{6}{48} + \frac{8}{60} = \frac{31}{120}$$

PROBABILITAT DE LES CAUSES (Teorema de Bayes)

Si en el primer exemple sabem que un cop efectuada la prova completa ha sortit una bola blanca, puix que aquesta bola pot haver sortit de l'urna M o de l'urna N , és a dir que s'hagi produït A o $\bar{A}$, ens podem preguntar quina és ara la probabilitat de A o de $\bar{A}$. Aquestes probabilitats ja no són $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, ja que la informació "ha sortit bola blanca" modifica la situació. En l'exemple primer els casos igualment probables de bola blanca són els representats pels sis rectangles iguals ratllats, dels quals dos corresponen a A i quatre a $\bar{A}$, és a dir, dos a cara i quatre a creu en la tirada de la moneda.

La probabilitat de A (cara o urna M) és $\frac{2}{6}$ i la probabilitat de $\bar{A}$ (creu o urna N) és $\frac{4}{6}$.

En fòrmules, si ha sortit bola blanca (B) la probabilitat de què provingui de l'urna M (esdeveniment A) és:

$$p(A/B) = \frac{p(A)p(B/A)}{p(A)p(B/A) + p(\bar{A})p(B/\bar{A})} \qquad \left(\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}\right)$$

En l'exemple segon, si sabem que ha sortit una bola blanca, calcularem la probabilitat de què la bola blanca provingui de l'esdeveniment A (urna M) de la mateixa manera, però tenint compte d'avaluar les probabilitats no pas pel nombre de rectangles sinó per llurs àrees.

$$p(A/B) = \frac{\frac{1}{3}\,\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\,\frac{3}{8} + \frac{2}{3}\,\frac{2}{10}} = \frac{15}{31} = 0{,}4839$$

<u>CAS GENERAL</u>

A la figura 1 la probabilitat de cada esdeveniment es mesura per l'àrea del rectangle que el representa. La probabilitat de A suposant complert B és, doncs,

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)p(B \cap A) + p(\bar{A})p(B \cap \bar{A})}$$

Aquesta fòrmula, amb les expressions [*] dóna la fòrmula de Bayes:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)p(B/A) + p(\bar{A})p(B/\bar{A})}$$

La generalització al cas en què les proves P i Q puguin donar lloc a més de dos esdeveniments és immediata.
