Sobre un exercici de primer any

Pere Menal*

L'Enric Nart proposà als seus estudiants d'Àlgebra I el següent exercici:

I. <u>Siguin K un cos ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ per a nostàlgics) i V un K-espai vectorial de dimensió finita. Per a cada endomorfisme $f \in \mathrm{End}_K(V)$ trobar la dimensió del seu centralitzador (és a dir el subespai</u>

$$\underline{C(f) = \{ g \in \mathrm{End}_K(V) \ : \ fg = gf\}}.$$

A l'hora de resoldre aquest exercici els estudiants s'han trobat amb moltes dificultats i sembla ser que no tenen cap resposta que sigui acceptable. Això ha fet que s'hi hagi interessat gent de cursos superiors, en particular l'autor (estudiant de 12$^{\text{é}}$ any). Però, és clar! un profesional de la matemàtica ha de pensar i resoldre problemes que siguin publicables, per tant es fa necessari trobar primer un enunciat adequat als nostres propòsits.

Primerament haurem d'introduir un mínim de notació i algunes definicions. D'ara endavant K serà un cos commutatiu i R una K-àlgebra de dimensió finita. Hom diu que R és separable si el radical de Jacobson de l'anell $R \otimes_K L$ és zero per a tot cos L extensió de K. Una aplicació $\delta : R \longrightarrow R$ es diu que és una K-derivació si es compleixen les següents propietats:

---

* Aquest treball no ha estat financiat per ningú i mentre va ser escrit (segon cap de setmana, Febrer del 1980), un cert nombre de persones es van enutjar, molt especialment la dona de l'autor.

$$\delta(x+y) = \delta(x)+\delta(y),$$
$$\delta(xy) = \delta(x)y+x\delta(y),$$
$$\delta(K) = 0,$$

per a tot $x,y\in R$. En particular $\delta_x^R(y) = xy-yx$ és una K-derivació que s'anomena la <u>derivació interna induïda per x</u>.

En aquest paper ens dedicarem a estudiar la qüestió següent:

II. <u>Si R és separable, quina és la dimensió del Ker δ_x^R per a cada $x\in R$?</u>

Començarem amb un lema ben conegut del qual no hem pogut trobar cap demostració enlloc.

<u>Lema</u>. <u>Sigui V un K-espai vectorial de dimensió finita i suposem que x, y són dos endomorfismes de V que commuten. Suposem que $V = V_1\oplus\ldots\oplus V_n$ és la descomposició primària corresponent a x. Aleshores</u>

a) <u>Cadascun dels V_i's és invariant per y,</u>

b) $\mathrm{Ker}\ \delta_x^R = \mathrm{Ker}\ \delta^{R_1}_{x|V_1} \oplus\ldots\oplus \mathrm{Ker}\ \delta^{R_n}_{x|V_n}$,

<u>on</u> $R = \mathrm{End}_K(V)$ <u>i</u> $R_i = \mathrm{End}_K(V_i)$.

Demostració: a) En efecte, fixem un V_i, aleshores V_i és l'anul.lador d'un cert polinomi en x, diguem p(x). Donat que xy=yx tenim que $p(x)y = yp(x)$ i així $p(x)(yV_i)=y(p(x)V_i)=0$. És a dir, $yV_i\subset V_i$. b) resulta immediatament de a).

III. <u>Resolució de II (esbós)</u>.

Si δ^R és una K-derivació i L és una extensió del cos K, aleshores δ^R s'estén de manera natural a una L-derivació $\delta^{R\otimes_K L}$ de la L-àlgebra $R\otimes_K L$. Hom veu fàcilment que $\mathrm{Ker}\ \delta^{R\otimes_K L} = \mathrm{Ker}\ \delta^R \otimes_K L$ i en conseqüència $\dim_L \mathrm{Ker}\ \delta^{R\otimes L} = \dim_K \mathrm{Ker}\ \delta^R$; en particular aquesta fórmula val en el cas d'una derivació interna δ_x. Donat que R és separable tenim que per a qualsevol cos L extensió de K, l'àlgebra $R\otimes_K L$ és una L-àlgebra de dimensió finita i semisimple. Tenint en compte tot això podem suposar que K és algebraicament tancat. Ara bé, el teorema d'Artin i Wedderburn ens diu que R és isomorf a un producte finit d'anells de matrius R_i sobre K. Així posem:

$$R = R_1 \times \ldots \times R_k,$$

si el nostre element $x\in R$ s'expressa com $x=(x_1,\ldots,x_k)\in R_1\times\ldots\times R_k$, tenim que $\operatorname{Ker}\delta_x^R = \bigoplus_1^k \operatorname{Ker}\delta_{x_i}^{R_i}$. Per tant el problema es redueix al cas en que $R=M_n(K)$ per a un cert n. Observem que per a qualsevol matriu $g\in M_n(K)$ invertible es té que $\operatorname{Ker}\delta^R_{g^{-1}xg} =$ $= g^{-1}\operatorname{Ker}\delta_x^R\, g$; això ens permet suposar que x és una matriu de Jordan. Tenint en compte el lema, només cal considerar el cas en què x té un sol valor propi, diguem-li λ. És a dir, x té la forma

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda \ddots & \\ & & \lambda\end{pmatrix}}^{n_1} & & \\ & \overbrace{\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda \ddots & \\ & & \lambda\end{pmatrix}}^{n_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

on $n_1\geq n_2\geq\ldots\geq n_r$. Ara bé, uns minuts de reflexió per part del lector no seran suficients, en general, per arribar a convèncer-se que la dimensió del centralitzador de la matriu x és $n_1+3n_2+\ldots+(2r-1)n_r$. Això completa la solució.

Ara tenim com a corol.lari una resposta a la pregunta d'en Nart:

Corol.lari* Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial de dimensió finita i siguin $\lambda_1\lambda_2,\ldots\lambda_m$ els diferents valors propis de f. Si $n_{i1} \geqslant \ldots \geqslant n_{ir_i}$ designen els ordres de les caixes corresponents al valor propi λ_i, per $i = 1,\ldots,m$. Aleshores la dimensió del centralitzador de f és

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{r_k} (2s-1) n_{ks} \right).$$

Aquest Corol.lari es pot també enunciar d'una forma potser més interessant per als estudiants de subespais commutadors (i.e. teoristes d'àlgebres de Lie). Concretament, amb les notacions anteriors tenim

Corol.lari $\dim_K [f, M_n(K)] = n^2 - \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{r_k} (2s-1) n_{ks} \right).$

Donat que aquest treball va dirigit al gran públic, pot ser útil acabar-lo fent algunes consideracions de tipus meto-didàctiques relacionades amb els resultats que hem obtingut, a fi que els professors d'ensenyament secundari ho puguin explicar àdhuc a batxillerat.

Donem als alumnes una matriu M amb n files i n columnes i demanem-los la dimensió del subespai de les matrius que commuten amb M.

Aleshores les instruccions són:

---

*Qualsevol contraexemple serà apreciat sempre que li sigui comunicat a l'autor abans de la publicació d'aquest treball.

1.- Passar la matriu M a la forma canònica de Jordan, diguem-li N. (per estudiants de batxillerat és aconsellable donar directament la forma canònica).

2.- Reunir les caixes corresponents al valor propi (per cada valor propi). Així s'obté una matriu N_λ dins la qual les caixes s'han de posar ordenades d'acord amb llur grandària, començant per les més grands a partir del NO.

3.- Construir, per cada N_λ , una matriu quadrada P_λ de números naturals, de la manera següent: a la diagonal es posen els ordres de les caixes de la matriu N_λ en l'ordre en què aquestes venen donades per 2. Els elements d'una fila que es troben per sota de la diagonal són iguals a l'element de la mateixa fila que es troba a la diagonal. Els elements d'una columna que es troben per sobre de la diagonal són iguals a l'element de la mateixa columna que es troba a la diagonal

4.- Sumar totes les components de la matriu P_λ i sumar tots els resultats obtinguts pels diferents λ's. El número que s'obtindrà serà la dimensió desitjada.

Posem un exemple:

<u>Exemple</u>: Trobar la dimensió del centralitzador a $M_{11}(K)$ (K és un cos qualsevol) de la matriu:

$$\begin{pmatrix}
3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\
-7 & -7 & -7 & 2 & -7 & -7 & -7 & -7 & -6 & -9 & -8 \\
13 & 13 & 13 & 12 & 13 & 3 & 13 & 13 & 14 & 11 & 12 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 13 & -7 & 3 & 4 & 1 & 2 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 13 & -7 & 4 & 1 & 2 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 13 & -6 & 1 & 2 \\
-7 & -7 & -7 & -8 & -7 & -7 & -7 & -7 & -6 & 1 & -8 \\
-17 & -17 & -17 & -18 & -17 & -17 & -17 & -17 & -16 & -9 & -8
\end{pmatrix}$$

Aleshores, en Jaume LLibre m'ha assegurat que, seguint les instruccions 1-4, la dimensió és 23.

BIBLIOGRAFIA

1. G. Renault, Algèbre non commutative, Gauthier-Villars 1975. (Aquest llibre no s'utilitza en el treball però el lector pot veure com el Teorema 4 de la p.111 contradiu els nostres resultats).

AGRAÏMENT

Estic en deute amb el Dr. Stone Hard el qual m'ha comunicat que Frobenius, en un article recent, obté resultats semblants als nostres.

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona