EL CUB DE RUBIK

Jaume Aguadé

S'hi dediquen cursets a Cambridge, es fan concursos de velocitat, és tema d'articles a revistes científiques, es ven a dojo als grans magatzems, especialistes en teoria de grups n'escriuen monografies, a Hong-Kong comencen a produir-ne còpies il.legals a baix preu,... Estic parlant, com ja deveu haver imaginat, del cub de Rubik, l'actualitat del qual justifica, potser, que hi dediquem uns mots en aquest butlletí. Certament, en un moment en què tanta gent s'hi està dedicant no puc pretendre dir-ne res molt original, però m'encoratge el fet de que qualsevol indicació que doni pot ésser ben rebuda pels que fa dies que no dormen per culpa d'aquesta obsessiva joguina.

1.- El grup del cub

Evidentment, el cub de Rubik no és altra cosa que la materialització d'un cert grup finit, els elements del qual són els diversos moviments que podem realitzar amb el cub. D'entre aquests moviments n'hi ha 6 que són particularment importants: són els que consisteixen en donar un gir de 90º, per exemple en el sentit de les agulles del rellotge, a cada una de les 6 cares del cub. Per tal de poder introduir una notació còmoda, caldria donar noms a aquests elements del grup. Si ningú no té una idea millor podríem denominar F,B,R,L,U,D, els moviments consistents en girar 90º en el sentit de les agulles del rellotge les cares de davant, darrera, dreta, esquerra, dalt i baix, respectivament. Aquests elements tenen ordre 4; és a dir:

$$F^4 = B^4 = R^4 = L^4 = U^4 = D^4 = 1$$

i és ben clar que generen el grup total. En efecte, qualsevol moviment que realitzem amb el cub descomposarà com una successió dels moviments elementals F,B,R,L,U,D. Hem obtingut així una família de generadors del grup del cub, que d'ença d'ara anomenarem G.

G és un grup finit. Si calgués demostrar-ho podriem dir que G és un subgrup del grup de permutacions dels 54 quadrats de que estan formades les cares del cub. En particular, l'ordre de G és un divisor de 54! Quin és exactament l'ordre de G? Si G fos un grup senzill, d'ordre petit, seria fàcil resoldre qualsevol problema sobre el cub, simplement traslladant-lo al grup G. Però el grup G té

$$2^{27}.3^{14}.5^{3}.7^{2}.11 = 43.252.003.274.489.856.000$$

elements! (per què?).

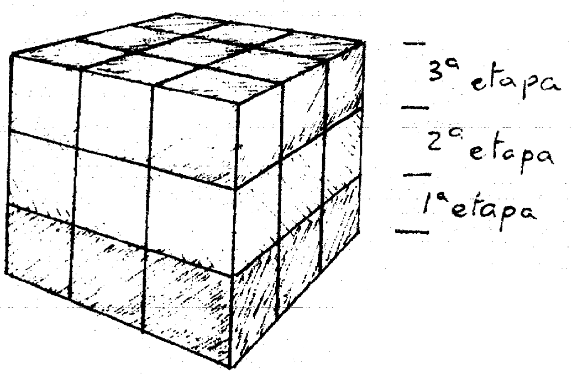
La determinació de l'estructura de G és, doncs, un problema digne d'estudi, on els estris de la teoria de grups finits poden demostrar la seva eficàcia. Sense arribar, però, a preguntar-se per l'estructura de G, el cub pot servir per a donar exemples pràctics de conceptes de teoria de grups, com ara: no commutativitat, invers d'un producte, subgrups, commutadors, ordre d'un element, generadors i relacions,... per citar els més senzills. Des d'aquest punt de vista el cub pot tenir una certa funció didàctica. Per exemple, pot servir per veure que $FR \neq RF$, però, en canvi, $RL = LR$. Pot servir per veure que l'invers de $FR^{-1}L^2U^2$ és $U^2L^2RF^{-1}$ i no pas qualsevol altra cosa. Com que G és un grup finit, tot element té ordre finit; per tant, si fem qualsevol moviment, com ara FR, i el repetim indefinidament, arribarem altre cop a on érem. Aquest fet és trivial pensant en el grup G, però pot ser sorprenent efectuat sobre el cub. També podem utilitzar el cub per a donar exemples del teorema de Lagrange (veient que tots els moviments tenen com a ordre un divisor de l'ordre del grup) i del teorema de Sylow (trobant per a cada primer p que divideixi l'ordre de G un element que tingui ordre p). Les possibilitats són il.limitades.

2.- El problema fonamental

El problema fonamental consisteix en, donat un cub que ha estat manipulat (n'hi ha prou amb uns pocs girs), tornar-lo a la seva posició original. El descobrir un algorisme que ens per meti de fer això és l'objectiu principal de tothom que comença a jugar amb el cub. Un cop es coneix es pot tornar el cub a la seva posició inicial en uns 3 a 10 minuts (a la televisió suïssa es va organitzar un concurs de velocitat en el qual el guanyador va ordenar el cub en 50 segons !).

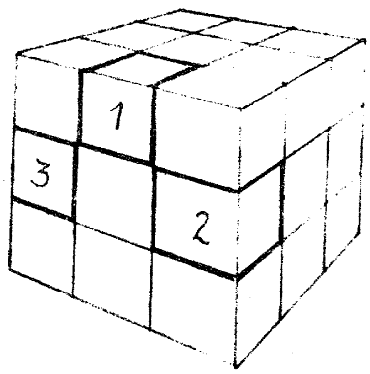
No ofendrem al lector donant-li la solució del problema. Ens limitarem a indicar en línies molt generals una possible estratègia. Evidentment, tot el que direm serà ben conegut per tothom que hi ha jugat durant un cert temps.

Podem dividir la reconstrucció del cub en 3 etapes, consistents en 1er) ordenar la cara inferior; 2on) ordenar la banda horitzontal central; 3er) ordenar els 9 cubs de dalt.



Respecte a la primera etapa, no cal dir res. Tothom que s'hi dediqui serà capaç, després d'una certa estona, de reconstruir una cara del cub. Amb una mica de pràctica això es pot fer en 1 minut. És clar que quan em refereixo a reconstruir una cara del cub vull dir de manera que els quadrats de la part de baix (ratllats més foscos a la figura anterior) tinguin el color que els correspon. Un cop enllestida aquesta etapa tindrem, com a mínim, 25 quadrats ben situats.

Per tal de resoldre la segona etapa cal trobar, moviments que, sense alterar la cara inferior, ens duguin, per exemple, el cub 1 a la posició 2:



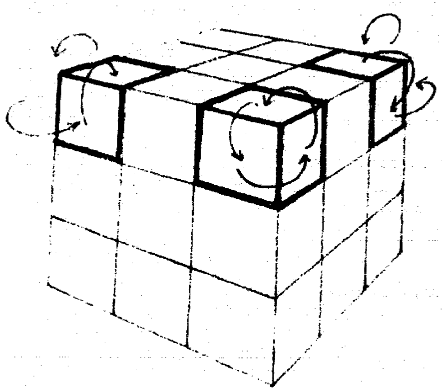
El moviment F ens duu 1 a 2, però destruiex la cara inferior. Es tracta de trobar un moviment X que ens "amagui" la cara de baix a un lloc segur i fer XFX^{-1}.

No n'hi ha prou amb aquest moviment X per a ordenar la banda del mig. Si el cub 3 està ja ben posat, ens cal un moviment que dugui 1 a 2, protegint la cara inferior i el cub 3. Aquest moviment serà també de la forma YFY^{-1}. Un cop trobats els moviments X,Y (generalment desprès d'uns certs instants de meditació), serem capaços d'ordenar la banda horitzontal, llevat, potser, d'un únic cub. La col.locació d'aquest darrer cub de la banda horitzontal del mig és, potser, el primer problema seriós que cal resoldre. Cal dur 1 a 2 (per exemple, fent F), però de manera que cap altre cub de la banda horitzontal s'alteri ni, evidentment, cap dels cubs de la cara de baix. Cal trobar un moviment Z que tregui de la cara de davant tots els cubs ben situats i aleshores fer ZFZ^{-1}. Un cop descobert aquest moviment (ben segur desprès d'una bcna estona de meditació) som capaços ja d'ordenar les dues terceres parts del cub i podem iniciar la tercera etapa.

En aquest moment comencen les autèntiques dificultats ! Els moviments X,Y,Z, que potser ens havien costat tant d'esforç, són ara relativament trivials, comparats amb la tasca que ens espera. Cal trobar moviments que només ens alterin la cara de dalt, deixant invariant tota la resta. Una possible estratègia consisteix en 1er) posar cada cub al seu lloc encara que sigui amb una orientació errònia; 2on) orientar els cubs, sense moure'ls. El dur a terme aquestes etapes requereix descobrir quatre moviments que deixin invariants els dos terços inferiors i que facin el següent:

1) Permutar dos cubs de les arestes superiors, sense moure les dues altres arestes;
2) permutar els cubs de les cantonades superiors, sense tocar les arestes;
3) canviar l'orientació dels cubs de les arestes superiors, sense moure cap cub;
4) canviar l'orientació dels cubs de les cantonades superiors.

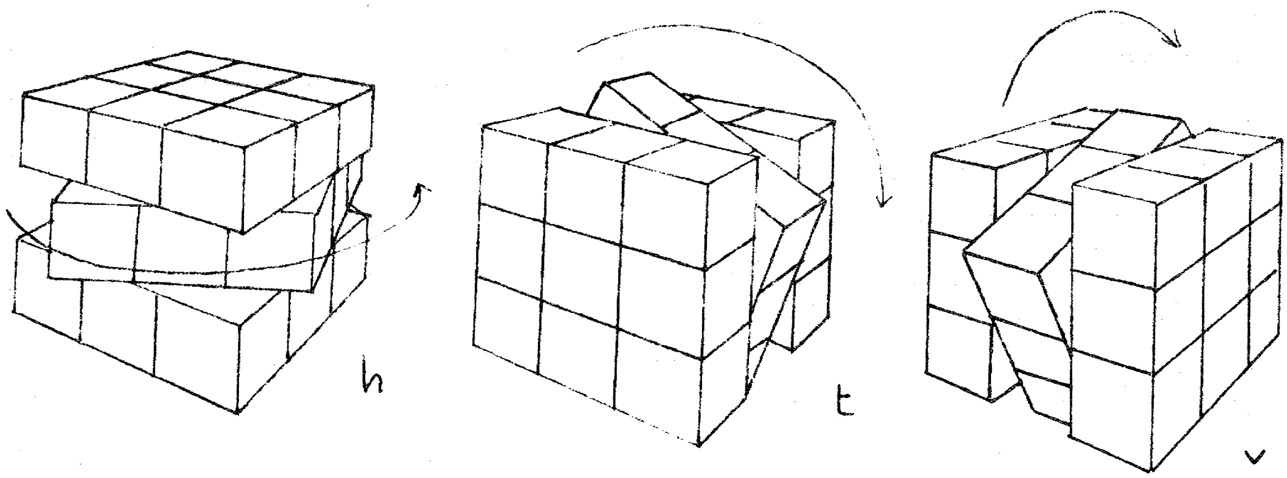
Puc dir que no és gens fàcil trobar aquests moviments. Per exemple, el moviment $(BRFL)^{105}$ canvia simultàniament l'orientació de tres de les cantonades de dalt, sense modificar res més.



... és clar que hi ha moviments més senzills que fan el mateix!

3.- Un subgrup interessant

La primera cosa que hom constata quan compra un cub és que n'hi ha prou amb uns pocs girs perquè el cub resti ja totalment desordenat. En canvi, no deixa d'ésser curiós observar què és el que passa si partim d'un cub ordenat i realitzem només moviments d'algun dels tres tipus següents



En funció dels generadors anteriors és

$$h = UD^{-1}, \quad v = LR^{-1}, \quad t = BF^{-1}.$$

Si només fem moviments d'aquest tipus veiem que el cub no es desordena mai del tot i en qualsevol moment podem, amb una certa paciència, retrobar la posició inicial. Es tracta d'un trencaclosques molt més senzill que no pas el problema original.

Si només fem moviments que són combinació de h,v,t, el que estem fent és moure'ns al subgrup H de G generat per h,v,t. El fet de que sigui relativament fàcil reordenar el cub si ha estat desordenat dintre del subgrup H ens diu que l'ordre de H ha d'ésser relativament petit. Pot ser un exercici interessant el determinar l'estructura de H.

Si partim d'un cub ordenat i fem el moviment $hvh^{-1}v^{-1} = [h,v]$ arribarem a una situació molt bonica en què al centre de cada cara hi ha un cub de color diferent al de la resta de la cara. Els commutadors

$$a = [h,v] \;, \quad b = [v,t] \;, \quad c = [h,t]$$

generen un cert subgrup H' de H. Com a exemple calcularem l'estructura d'aquest grup, que resulta ésser isomorf a A_4, el grup alternat sobre 4 elements. En efecte, és sabut que A_4 té una presentació amb generadors S,T i relacions

$$S^3 = 1 \;, \quad T^2 = 1 \;, \quad (ST)^3 = 1.$$

Definim

$$f: A_4 \longrightarrow H'$$

posant $f(S) = a$, $f(T) = a^2b$. Per veure que això dóna realment un homomorfisme cal comprovar que

$$a^3 = 1, \quad (a^2b)^2 = 1, \quad (a^3b)^3 = 1$$

cosa que és fàcil de veure experimentalment. També es comprova que $a^2b^2 = c$, d'on resulta que

$$b = f(ST), \quad c = f(TST)$$

i, per tant, f és epimorfisme. D'altra banda és fàcil veure, jugant amb el cub, que H' té com a mínim 12 elements diferents; per tant f és un isomorfisme: $H' = A_4$.

4.- "Cub Forum"

Els problems, jocs, resultats, càlculs,... a que dóna lloc el cub són il.limitats. És per això que proposem obrir en aquest butlletí un

C U B   F O R U M

on tots els consocis que ho desitgin hi puguin dir la seva. Esperem, doncs, les vostres cartes amb problemes, solucions i noves idees sobre qualsevol de les facetes d'aquest increïble objecte. (No podem incloure, però, les comunicacions relacionades amb els problemes psiquiàtrics que el seu mal ús pot produir). Especialment interessants poden ésser les aplicacions didàctiques del cub. Podeu adreçar les vostres cartes a la Societat (Apartat 1146, Barcelona) o bé a la meva adreça que figura al final.

5.- Problemes

En aquesta primera avinentesa, proposo les següents qüestions:

1) Per a cada primer p que divideixi l'ordre de G (és a dir 2,3,5,7 i 11) trobar un element de G d'ordre p (si p = 2 és trivial, si P = 3 ja he donat un exemple a l'apartat 3;

resten p = 5,7,11).

2) Determinar l'ordre i l'estructura del subgrup H descrit a l'apartat 3.
3) Trobar grups coneguts que siguin subgrups de G (per exemple, a l'apartat 3 hem vist que A_4 és subgrup de G).
4) Es pot dir alguna cosa sobre els centres de G i H?
5) Calcular els abelianitzats de G i H.

Forschungsinstitut für Mathematik
ETH-Zentrum
8092-Zürich, Suïssa.