EL PROBLEMA DELS SET SETS

En el darrer Butlletí haviem proposat el problema de trobar totes les xifres substituïdes per punts en la següent divisió:

```
. . 7 . . . . . . .  | . . . . 7 .
. . . . . .          +------------
-----------            . . 7 . .
. . . . . 7 .
. . . . . . .
-------------
    . 7 . . . .
    . 7 . . . .
    -----------
    . . . . . . .
    . . . . 7 . .
    -------------
        . . . . . .
        . . . . . .
        -----------
                  0
```

L'Albert Fàbrega i l'Enric Nart ens han enviat la solució correcta. Essencialment, el mètode que han seguit per a obtenir-la ha estat el mateix que va donar Callandreu (Célèbres problèmes mathématiques, Edition Ablin Michel Paris, 1949) (Veure també, Col.lecció Σ). Per tant, donem a continuació la solució d'aquest darrer.

Si substituim per lletres les xifres que falten

```
A  B  7  C  D  E  L  Q  W  Z' | α  β  γ  δ  7  ε
a  b  x  c  d  e              +-----------------
----------------                ι  λ  7  μ  υ
F  G  H  J  K  7  L
f  g  h  j  k  y  l
-------------------
      M  7  N  O  P  Q
      m  7  n  o  p  q
      ----------------
      R  S  T  U  z  V  W
      r  s  t  u  7  v  w
      -------------------
            X  Y  Z  X' Y' Z'
            X  Y  Z  X' Y' Z'
            -----------------
                             0
```

La primera xifra α del divisor ha d'ésser 1 ja que el producte 7 de la ratlla sis només té sis xifres.

Si considerem les restes parcials de les ratlles tres i set, com que cada una tẽ sis xifres, F i R han d'ésser iguals a la unitat, ja que FGHJK7 i RSTUzV són ambdós més petits que $\alpha\beta\gamma\delta 7\epsilon$. Per tant, F = R = 1 i també f = r = 1.

El divisor no pot ésser superior a 199.979, i com que μ no és més gran que 9, el producte parcial de la ratlla vuit és com a màxim 1.799.811; per tant, s és més petit que 8. Però, com que S és la diferència entre els dos sets de la columna immediatament superior, S ha d'ésser 9 o 0. Ara bé, a la ratlla nou la resta S-s és 0; per tant, S = s = 0. Sabent que α = 1, S = 0 i R = 1, resulta que M = m+1 $\leq$ 9, i per tant el producte parcial de la ratlla sis és, com a màxim, 87nopq.

La segona xifra β del divisor pot ésser únicament igual a 0,1 o 2, perquè si fos més gran o igual que 3 el divisor hauria d'ésser al menys 130.000, i el producte d'aquest per 7 seria 910.000, que és superior a 87nopq. Suposem β = 0; aleshores el divisor és com a màxim 109.979, i el seu producte per la xifra més alta possible (el 9) del quocient dóna encara un producte parcial de sis xifres. Per tant, β ha d'ésser més gran que 0. Suposem β = 1; aleshores γ només pot ésser igual a 0 o 1, perquè, si $\gamma \geq 2$ el producte parcial del divisor per 7 donaria per a la segona xifra de la ratlla sis una xifra més gran que 7; però, per altra banda, γ no pot ésser 0 perquè, àdhuc amb un 9 en el quocient, el producte parcial 9x110.979 no tindria set xifres, tal com ho requereix la ratlla vuit. Suposant, doncs, γ = 1, per trobar δ, ϵ, μ, debem considerar que el producte parcial μ x 111.879 ha d'ésser un número de set xifres en el que la tercera començant per la dreta sigui 7. μ ha d'ésser, per tant, igual a 9, ja que μ = 8 donaria un número de sis xifres; per conseqüent, δ ha d'ésser igual a 0 o a 9. En el primer cas el divisor hauria d'ésser com a màxim 110.979, que multiplicat per la xifra més gran del quocient (un 9) no arribaria a donar el número de set xifres necessari; en el segon cas (δ = 9) el divisor seria 111.97ϵ, que multiplicat per 7 donaria en la ratlla sis 783..., que no és correcte, ja que la segona xifra començant per l'esquerra ha d'ésser, per a aquest número, un 7. Per tant, β no pot ésser igual a 1. És, doncs, finalment, igual a 2 i es dedueix que m = 8 i M = 9.

Aleshores, el producte parcial de la ratlla sis és $7 \times 12\gamma\delta 7\epsilon$ i aquest ha d'ésser igual a 87nopq; per tant, γ ha d'ésser igual a 4 o 5, ja que $7 \times 126\delta 7\epsilon$ seria superior a 87nopq i 7×123979 seria inferior a aquest número. Així, doncs, $\mu = 8$, ja que 7×126979 donaria encara un producte parcial de sis xifres en lloc de les set que estiupula la ratlla vuit (10tu7vw) i 9×123979 seria massa gran. Ja que per $\gamma = 4$ el valor màxim del producte parcial de la ratlla vuit seria 8×124979 i, per això, inferior a 10tu7vw, γ ha d'ésser igual a 5.

Però, el producte parcial $8 \times 125\delta 7\epsilon$, que és 10tu7vw, ha de tenir per tercera xifra partint de la dreta un 7, que només és possible amb $\delta = 4$ o 9. Però, 7×125979 donaria un producte parcial superior a 87nopq a la ratlla sis; per tant, $\delta = 4$ i es dedueix, també, que ϵ no pot ésser més gran que 4. A partir d'això es té que n = 8 i que el producte parcial 10tu7vw de la ratlla vuit és $8 \times 12547\epsilon$, de manera que t = 0 i u = 3.

Com que X no pot ésser 0, és necessàriament més gran o igual que 1, de manera que T també. Però, per altres costat, com que n = 8 i N 9, resulta que $T \leq 1$, d'on T = 1 i, per tant, N = 9 i X = 1. El producte parcial $\nu \times 12547\epsilon$ de la ratlla deu implica que $\nu = 1$. D'aquí es dedueix que Y = 2, Z = 5, X'= 4, Y' = 7 i Z' = ϵ.

El producte parcial $\lambda \times 125.47\epsilon$ de la ratlla quatre és un número de set xifres i, per tant, λ ha d'ésser igual a 8 o 9.

Donem successivament a ϵ els valors 0,1,2,3,4 amb λ = 8 o 9. Els productes parcials de les ratlles quatre, sis i vuit són coneguts, i al reconstruir la divisió ha de sortir un 7 a la segona xifra de la dreta de la ratlla tres. Provant aquestes xifres una darrera l'altra s'arriba a la conclusió de que les condicions només es compleixen si $\lambda = 8$ i $\epsilon = 3$. Es poden refer, ara, tots els productes parcials i resulta: vw = 84, opq = 311, ghjkyl = 003784 i deduir-ne nous valors: UzVW = 6331, OPQ = 944, GHJK7L = 101778.

Només falten per determinar les ratlles primera i segona i la xifra representada per ι. El primer producte parcial de la ratlla dos, és a dir, $\iota \times 125.473$, ha de donar un número tal que sumat a la resta 110177 dongui AB7CDE. Només amb $\iota = 5$ es té aquest resultat. El quocient i el divisor estan, ara, totalment determinats i les darreres incògnites es dedueixen immediatament; així resulta: abxcde = 627365 i AB7CDE = 737542.

Jaume Llibre