REGULARITAT

per Albert Fàbrega

"Cada estructura "irregular", si és suficientment gran, conté una subestructura "regular" de cert tamany donat".

L. Lovász

L'any 1930, Frank Ramsey va publicar l'article "On a problem of formal logic" (R), i des d'aleshores un tipus molt determinat de problemes de la teoria de grafs constitueixen el que ja es coneix com la Teoria de Ramsey.

Recordem que un graf G és un conjunt finit de punts V(G), dits vèrtexs, i un conjunt finit E(G) d'arestes, de tal forma que a cada aresta e de E(G) se li associa un parell no ordenat de punts de V(G). Si a e li correspon el parell (x,y), diem que e connecta x a y i que és una (x,y)-aresta. x i y són els punts finals de l'aresta e, i si x=y l'aresta és un llaç. Dues arestes amb el mateix parell de punts finals són paral.leles. Un graf és simple si no té llaços ni arestes paral.leles, i en aquest cas (l'únic que considerarem en tot el que segueix) E(G) no és més que un conjunt de 2-subconjunts de V(G). Un graf complet K_n consta de n punts i de totes les arestes possibles entre parelles de punts

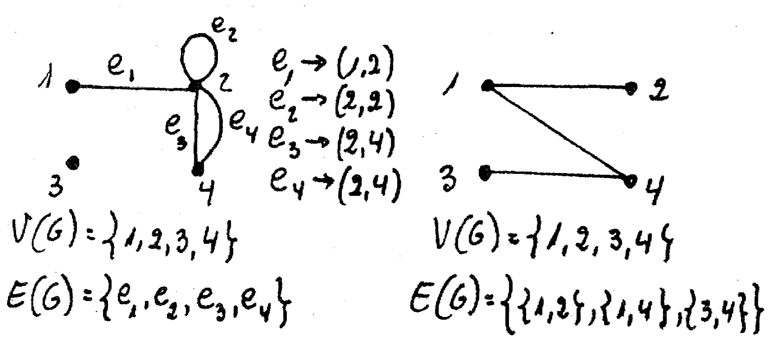

Fig. 1.- Un graf, un graf simple i un graf complet

Si contemplem un graf de manera que cada aresta és un 2-subconjunt (subconjunt format per 2 elements) de V(G), llavors és fàcil obtenir un concepte qu generalitza aquest de graf. Un hipergraf H és un conjunt finit V(H) de punts (vèrtexs) i un conjunt finit E(H) d'arestes, junt amb una ssociació d'un subconjunt de V(H) a cada aresra E, els punts del qual són els punts finals de E.Dues arestes amb els mateixos punts finals són paral.leles. L'hipergraf és simple si no conté arestes paral.leles, i en aquest cas E(H) pot ésser considerat com un conjunt de subconjunts de V(H). L'hipergraf és r-uniforme si cada aresta té r punts finals. Un hipergraf 2-uniforme és un graf sense llaços. Un hipergraf r-uniforme i complet en n vèrtexs, és un hipergraf simple que té tots els r-subconjunts del seu conjunt de vèrtexs com a restes. L'indiquem per K_n^r.

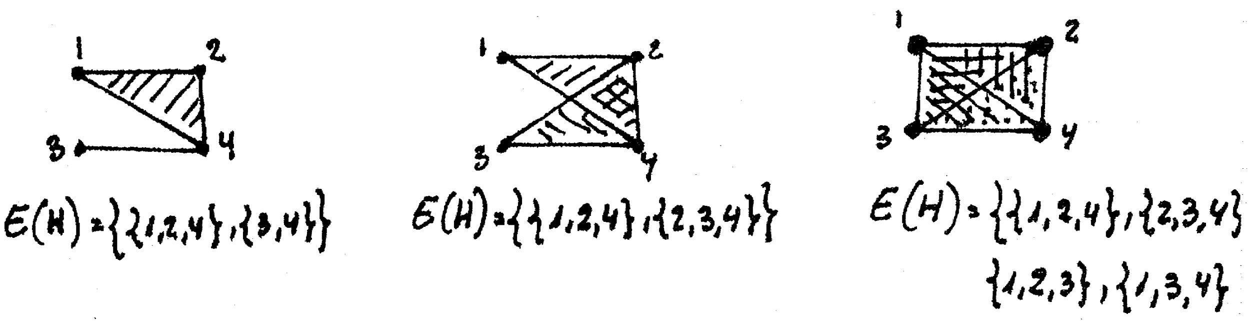

Fig. 2.- Un hipergraf, un hipergraf 3-uniforme i l'hipergraf K_4^3

Un problema senzill, que indica quin és l'esperit de la teoria de Ramsey, és el següent: Demostrar que en qualsevol reunió de 6 persones sempre n'hi ha 3 que es coneixen mútuament (cada una d'elles coneix a les altres dues) o bé 3 que no es coneixen mútuament (cap d'elles coneix a cap de les altres dues). Això no és cert amb 5 persones.

Representem cada persona per un punt i considerem K_6. Pintem les arestes amb dos colors (vermell i blau), amb el següent criteri: si dues persones es coneixen, l'aresta que les uneix la pintem vermella. Si no es coneixen, blava. Sigui v una de les persones~~. De v surten~~ 5 arestes (entre vermelles i blaves). Per tant hi ha 3 arestes vermelles o 3 de blaves. Si n'hi ha 3 de vermelles i entre els tres punts u_1,u_2,u_3 a que van a parar n'hi ha una de vermella (sigui u_1u_2), llavors v,u_1,u_2 formen un triangle de tres coneguts mútuament. Si no hi ha cap aresta vermella entre u_1,u_2 i u_3, llavors els tres punts formen un triangle blau i són tres mútuament desconeguts. El cas en què de v surtin tres arestes blaves és el mateix. Que això no és cert per a K_5 es pot veure a la figura

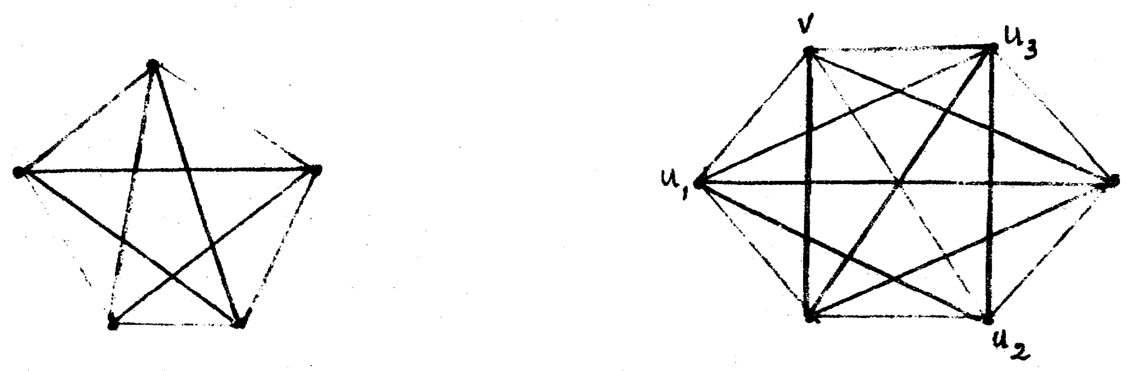

Fig. 3.- Reunió de pastors...

Situacions semblants es poden plantejar amb qualsevol nombre de colors, i arribem així al següent resultat: si $a_1 \ldots a_k$ són enters més grans que 0 ($k \geq 2$), existeix un nombre natural $n = R_k(a_1 \ldots a_k)$ tal que si k-acolorim les arestes de K_n de qualsevol manera, hi ha un $1 \leq i \leq k$ i un a_i-graf complet, amb totes les arestes de color i.

D'acord amb això, el que hem establert abans és que precisament $R_2(3,3) = 6$. No es coneixen ni tan sols els valors de $R_2(a,b)$, però es pot provar que $R_2(a,b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$. Com?

Al passar aquest resultat a hipergrafs, obtenim el punt clau de la teoria: el teorema de Ramsey.

Siguin $a_1 \ldots a_k \geq 1$ enters. Existeix un $R_n^r(a_1 \ldots a_k)$ tal que si k-acolorim les arestes de K_n^r podem trobar un a_i-subconjunt de $V(K_n^r)$ amb tots els r-subconjunts del mateix color.

Hi ha dins aquest tema resultats notables obtinguts amb tècniques no menys notables. Vegem.

En primer lloc el ja famós teorema de van der Waerden. Existeix un nombre $w=w(k,m)$ tal que si els nombres naturals $0,1,\ldots,w$ són k-acolorits, llavors hi ha una progressió aritmètica monocromàtica de longitud m.

Es pot trobar una demostració a (L) que corre al llarg de coloracions de conjunts i col.leccions -conjunts amb elements "repetits" on cada objecte té una multiplicitat-, però cal dir que no és fàcil ni curta.

Quin és el valor de w(2,3)? Si 2-acolorim els nombres 0,1,...,7 aleatòriament, quina és la probabilitat de que no hi hagi cap progressió aritmètica de longitud 3?

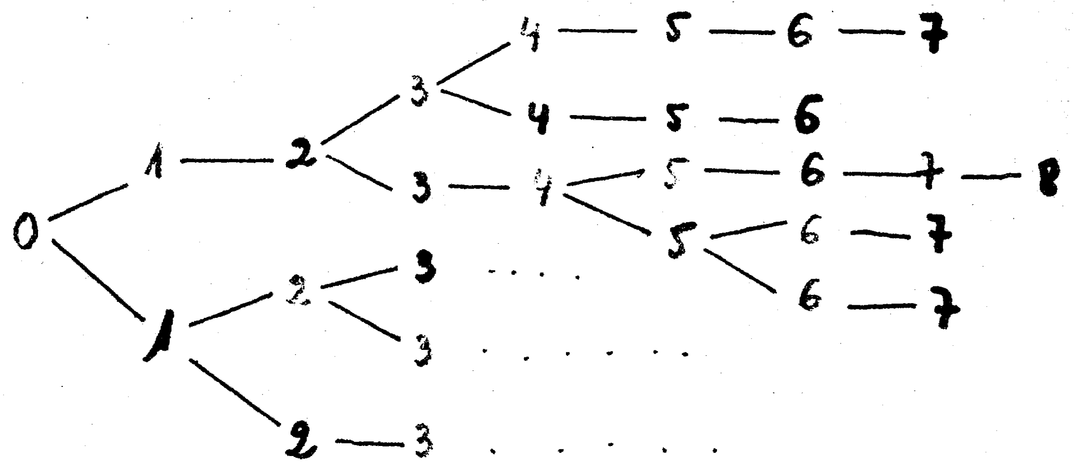

Fig. 4.- Cercant progressions.

Entrem a la geometria. Un problema força conegut és: com s'han de pintar els punts del pla amb 2 colors perquè no hi hagi cap triangle equilàter monocromàtic de costat 1? (G i L).

Demanem ara pel valor f(n) de tal forma que si col.loquem f(n) punts en el pla de qualsevol manera -sense haver-n'hi 3 d'alineats- sempre n'hi hagi n entre ells que formin els vèrtexs d'un n-àgon convex.

L'existència de f(n) s'estableix així:

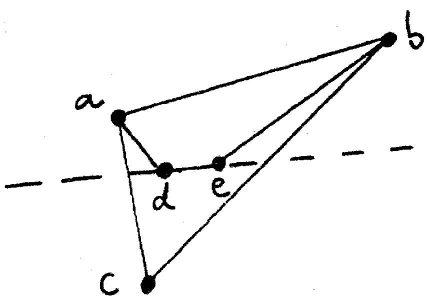

Fig. 5.- Una presó convexa.

En primer lloc, 5 punts en el pla sempre determinen un quadrilàter convex. En efecte, si la clausura convexa dels 5 punts és un pentàgon o un quadrilàter, ja hem fet Si és un triangle, tenim 2 punts a l'interior, d i e. La recta d,e talla dos costats, siguin ac i bc. Llavors a,b,d i e formen un quadrilàter convex.

Sigui ara $f(n) = R_2^4(n,5)$. Acolorim els conjunts de 4 punts amb dos colors, de forma que un conjunt és vermell si estableix un quadrilàter convex i blau en cas contrari. D'acord amb el teorema de Ramsey, o bé hi ha un conjunt de 5 punts amb tots els quadrilàters blaus (cosa impossible) o bé un conjunt de n punts amb tots els quadrilàters vermells. Ara, si un conjunt de n punts té tots els quadrilàters vermells, és a dir, convexos, és convex (perquè?), i, per tant, tenim un n-àgon convex.

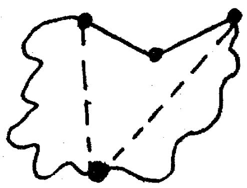

Fig. 6.- Un polígon no convex té un quadrilàter no convex

Per altra banda se sap que $2^{n-2}+1 \leq f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}+1$. Està conjecturat que la cota inferior és el valor de f(n). Vegem com es pot construir un conjunt de 2^{n-2} punts de manera que no hi hagi cap n-àgon convex. Ens caldrà, per això, comentar algunes altres coses de la teoria de Ramsey.

Un polígon es diu convex avall (amunt) si és convex i qualsevol semirrecta que surti dels seus vèrtexs i sigui paral.lela al semieix negatiu (positiu) de les y's, té només el seu punt final en comú amb el polígon. Es demostra, fent ús d'un resultat sobre torneigs transitius (un torneig és un graf en el que a cada aresta se li assigna una direcció, i exactament una de les dues possibles arestes (x,y), (y,x) pertany al graf; a més, el torneig és transitiu si $(x,y),(y,z) \in E(T) \Rightarrow (x,z) \in E(T)$) que un conjunt de $\binom{p+q}{p}+1$ punts en el pla en posició general (on s'inclou la condició de que cap línia determinada per elles és paral.lela a cap eix de coordenades) conté o bé un (p+2)-àgon convex avall o bé

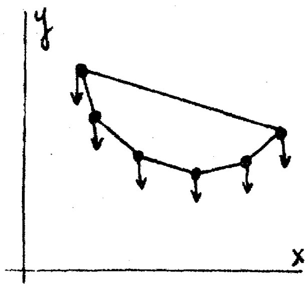

Fig. 7.- Un convex avall.

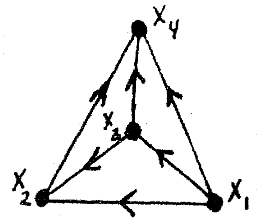

Fig. 8.- Un torneig transitiu.

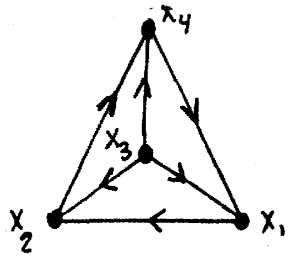

Fig. 9.- Un torneig no transitiu.

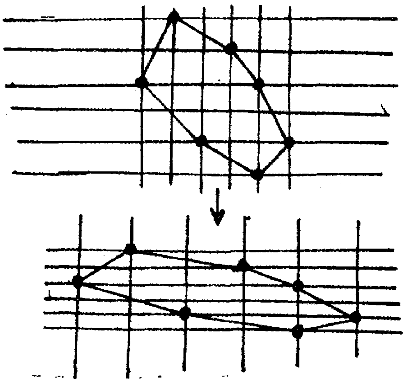

Fig. 10.- Aixefant angles.

un $(q+2)$-àgon convex amunt, i que per altra banda es pot construir un conjunt de $\binom{p+q}{p}$ punts de tal forma que no conté cap $(p+2)$-àgon convex avall ni cap $(q+2)$-àgon convex amunt.

D'acord amb això, la construcció és com segueix. Considerem els n-1 conjunts T_i $(i=0,\dots,n-2)$ format cada un d'ells per $\binom{n-2}{i}$ punts, així que no hi ha cap $(i+2)$-àgon convex amunt ni cap $(n-i)$-àgon convex avall (aquí $q=i$, $p=n-i-2$). Podem fer que el diàmetre de cada T_i sigui 1, i que qualsevol línia que uneixi dos punts de T_i formi un angle més petit de 45º amb l'eix de les x. (Podem aplicar, si convé, una afinitat).

Agafem, ara, un $(4n-4)$-àgon regular de diàmetre suficientment gran, i prenem els n-1 vèrtexs que queden dins el sector comprès entre -45º i +45º. Denotem-los per $v_o,\dots,v_{n-2}$. Traslladem cada T_i de forma que un dels seus punts vagi a parar a v_i. Tenim d'aquesta manera un conjunt S format per $\sum_{i=0}^{n-2} |T_i| = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = 2^{n-2}$ punts. (Si el $(4n-4)$-àgon és prou gran els conjunts T_i són mútuament disjunts).

Si S conté un conjunt P que forma un polígon convex, pot ser que:

1).- Els punts de P pertanyin a diversos conjunts T_i. Si és així, sigui T_i el i més petit i T_j el j més gran. Per a tot $i < k < j$ P pot tenim com a màxim un punt a T_k (en cas contrari, per la construcció de S, P no seria convex -vegeu la fig. 11). Per altra banda T_i té com a màxim un $(i+1)$-àgon convex amunt (la part de P que és a T_i ha d'ésser convexa amunt) i T_j té com a màxim un $(n-j-1)$-àgon convex avall. Així doncs, P té com a màxim $i+1+j-i-1+n-j-1 = n-1$ punts.

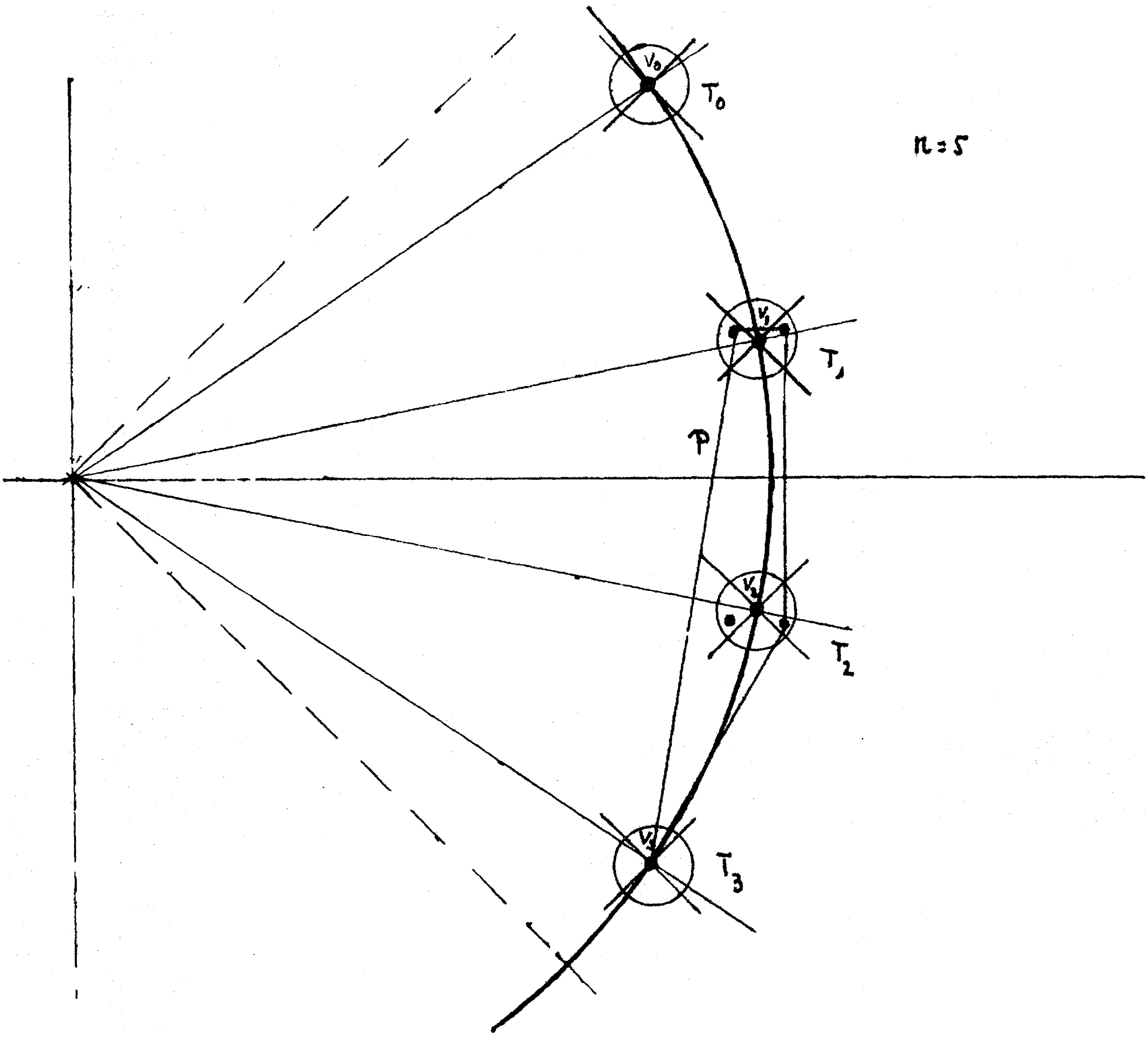

Fig. 11.- Una curiosa construcció.

2).- Els punts de P pertanyen a un sols T_i. Si a i b són els punts de P amb la mínima i màxima abscissa x respectivament, resulta que la diagonal ab divideix P en dos polígons, l'un convex avall i l'altre convex amunt. Així doncs, P pot tenir com a màxim $i+1+n-i-1-2 = n-2$ punts (el darrer -2 es degut a que a i b formen part tant del pológon convex amunt com del polígon convex avall).

En cap cas P pot tenir n punts.

Acabem amb un problema de Erdös i Rado que consisteix en l'estudi de la següent situació:

Si a>1 i b>1 són enters, i f(a,b) designa l'enter més petit tal que si tenim f(a,b)+1 conjunts amb com a màxim b elements cada un, sempre n'hi ha a d'entre ells que tenen a parells la mateixa intersecció, què hi ha sobre f(a,b)?

Se sap que f(3,3) = 20. Com es pot construir un sistema de 20 conjunts amb 3 elements con a màxim, tals que no n'hi hagi 3 d'ells que agafats 2 a 2 tinguin la mateixa intersecció?

Podeu consultar:

(L).- László Lovász. Combinatorial Problems and Exercises. North-Holland (1979).

(H).- Frank Harary. Graph Theory. Addison Wesley (1969).

(R).- Frank Ramsey. On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc. 30 (1930).

(HR).- Herbert J. Ryser. Combinatorial Mathematics. The Mathematical Association of America (1963).

(E).- Paul Erdös. Combinatorial problems in Geometry and Number Theory. American Mathematical Society. PSPUM vol XXXIV (1979).