EL PROBLEMA DELS CARRERS

Carles Barceló i Vidal

Catedràtic de Matemàtiques
Inst. de Batx. "S. Espriu'
Salt - Girona

1er curs de B.U.P.
COMBINATÒRIA
Didàctica

És corrent veure en els llibres de text de matemàtiques de 1er curs de B.U.P. l'enunciat -o equivalent- del següent problema, presentat com un problema més a resoldre per l'alumne:

> "En el plànol d'una ciutat, els carrers formen una quadrícula: les lletres designen els carrers horitzontals i els números, els verticals. Quants camins és possible seguir des de la cantonada B-3 fins la F-8, de manera que la longitud total del camí sigui mínima?
>
> (Bachillerato/1. Matemáticas. S.A. Casals)

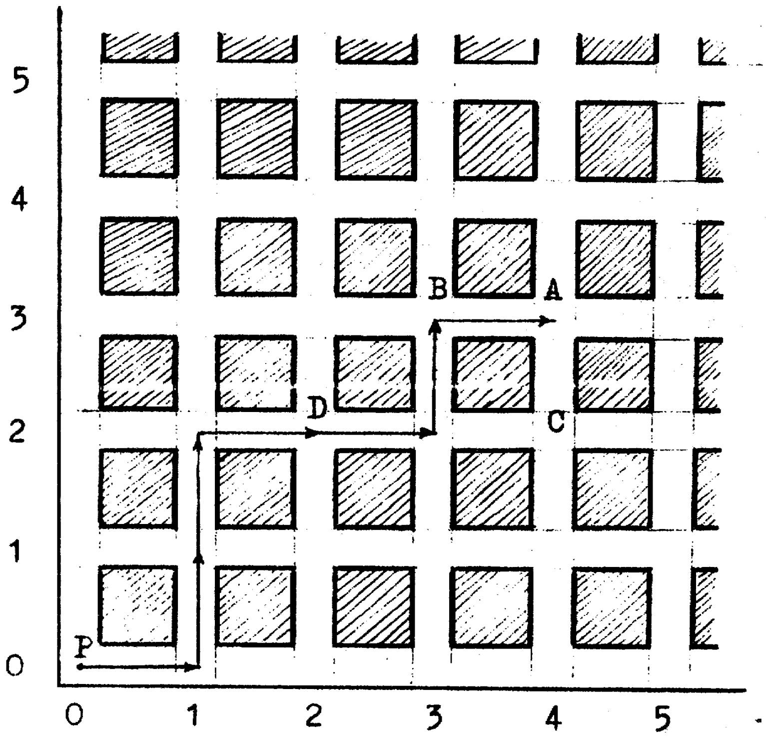
Crec que aquest és un problema del qual se li pot treure "molt de suc", no limitat-nos a la resolució d'un problema més de la llista.

La finalitat d'aquest senzill article no és altra que la de presentar algunes de les possibilitats que presenta la resolució d'aquest problema.

1. Context en què es situa el problema.

Alumnes de 1er curs de B.U.P. (14 anys) que acaben d'adquirir la noció de *combinació de m elements d'ordre n*, que saben calcular C_m^n i coneixen el significat de *nombre combinatori* $\binom{m}{n}$, ncara que no les propietats d'aquests nombres.

2. Enunciat inicial del problema proposat als alumnes.



Imagineu que el gràfic adjunt representa una sèrie de carrers delimitats per les successives illes d'habitacles, situació aquesta molt corrent en els eixamples de les grans ciutats.

Suposem que estem situats en l'encreuament *P* i volem anar fins el *A* tot seguint els troços de carrers delimitats per les illes de cases sense recular mai. En altres paraules, hem d'anar sempre o bé d'esquerra a dreta (→), o bé de baix a dalt (↑).

Ens preguntem, *quants són els possibles camins que ens condueixen de P fins A.*

3. Resolució dirigida del problema.

3.a. L'alumne ha de començar dibuixant sobre el gràfic uns quants camins que portin de P fins A. Aviat es donaran compte que hi ha més camins dels que inicialment s'imaginaven. Els alumnes poden comparar els seus camins amb els dibuixats pels seus companys de taula i comprovar com, difícilment, trobaran camins iguals als seus.

3.b. Tot seguit s'ha de presentar a l'alumne la necessitat de cercar una forma d'individualitzar els diferents encreuaments. Una manera senzilla de fer-ho és la de numerar els carrers verticals i horitzontats amb els números 0, 1, 2, 3, ... com si es tractés d'uns eixos de coordenades. D'aquesta manera, per exemple, l'encreuament A -cruïlla del carrer vertical nº 4 i de l'horitzontat nº 3- quedaria simbolitzat per $A = (4,3)$.

L'alumne simbolitzarà d'aquesta manera diferents encreuaments.

3.c. Es demana a un alumne que *oralment* (sense dibuixar-lo) expliqui a la resta de la classe un dels camins dibuixat per ell:

> "Primer un tram cap a la dreta, després dos trams amunt, després dos més a la dreta, tot seguit un tram amunt i finalment un tram cap a la dreta".

3.d. Es demana als alumnes que busquin una manera clara i senzilla de simbolitzar aquest camí. Es pot suggerir fer servir el símbol $\rightarrow$ per a representar els trams cap a la dreta i el símbol $\uparrow$ per els trams cap amunt. D'aquesta forma els alumnes aconsegeixen fàcilment simbolitzar-lo per:
$(\rightarrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \rightarrow)$.

3.e. Tot seguit els alumnes simbolitzaran d'aquesta manera els camins que havien dibuixat al principi.

Es recalcarà que observin:
- de quants trams es composen els camins (7);
- quants són $\rightarrow$ (4);
- i quants són $\uparrow$ (3).

L'alumne haurà de justificar el motiu d'aquesta uniformitat, observant com el número 4 de trams $\rightarrow$ no és res més que la 1ª coordenada de l'encreuament A = (4,3) i que la seva 2ª coordenada no és altra cosa que el nombre de trams $\uparrow$.

3.f. Feta la justificació anterior, els alumnes escriuran simbòlicament 3 camins fins A diferents dels dibuixats al principi. Després els dibuixaran tot comprovant que condueixen fins A .

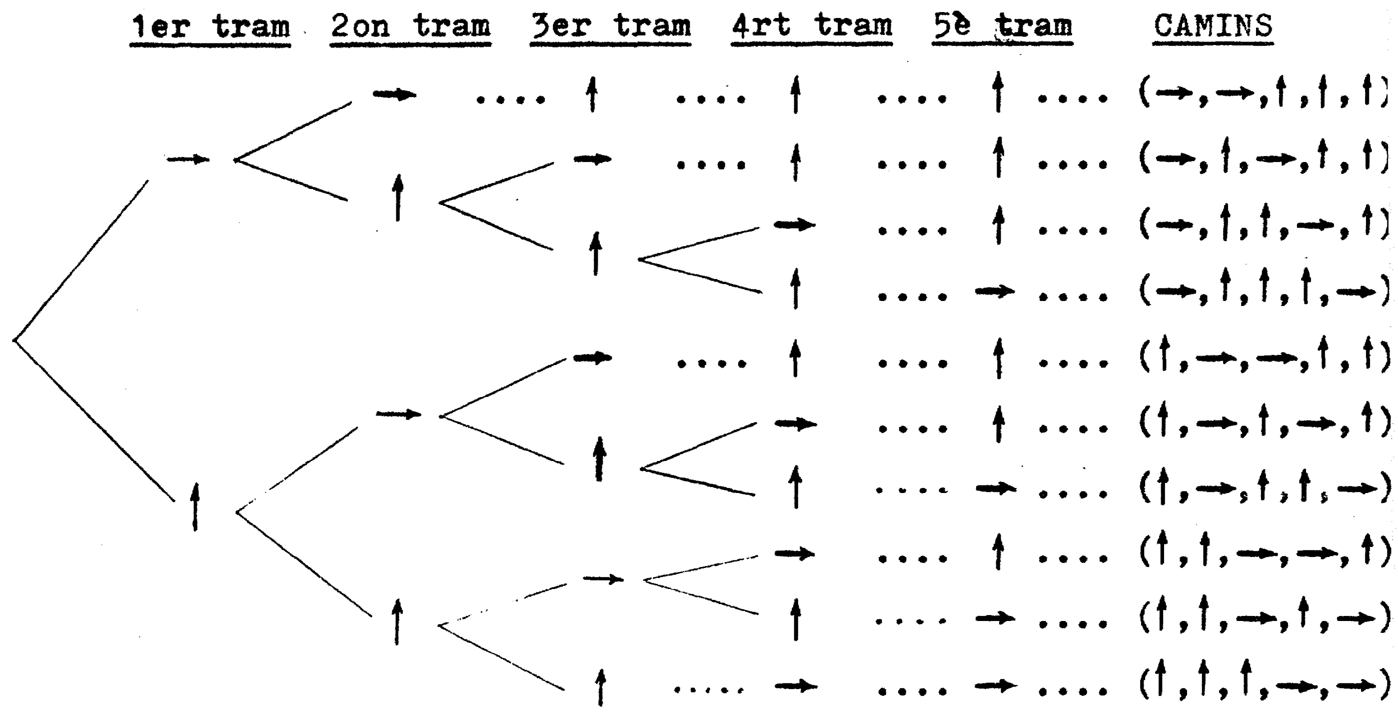
3.g. Ara ja es pot abordar el problema de calcular el nombre total de camins fins A equivalent a cercar tots els possibles camins de 7 trams, dels quals 4 han de ser $\rightarrow$ i altres 3 $\uparrow$.

L'alumne haurà de comprendre que en fa prou buscant les diferents formes de repartir els 4 trams $\rightarrow$ en els 7 trams de que es componen els possibles camins ja que els 3 trams $\uparrow$ han d'ocupar necessàriament els 3 buits que restin.

D'aquesta manera s'arribarà a $C_7^4 = \binom{7}{4} = 35$ com a número total de possibles camins de P fins A .

3.h. Per assegurar que l'alumne ha entés els raonaments anteriors se li demana que els repeteixi per buscar el nombre de camins que condueixen des de P fins l'encreuament D = (2,3).

A més a més se li demanarà que cerqui de manera efectiva tots els possibles camins en forma simbolitzada. Ho pot fer mitjançant un diagrama en arbre:

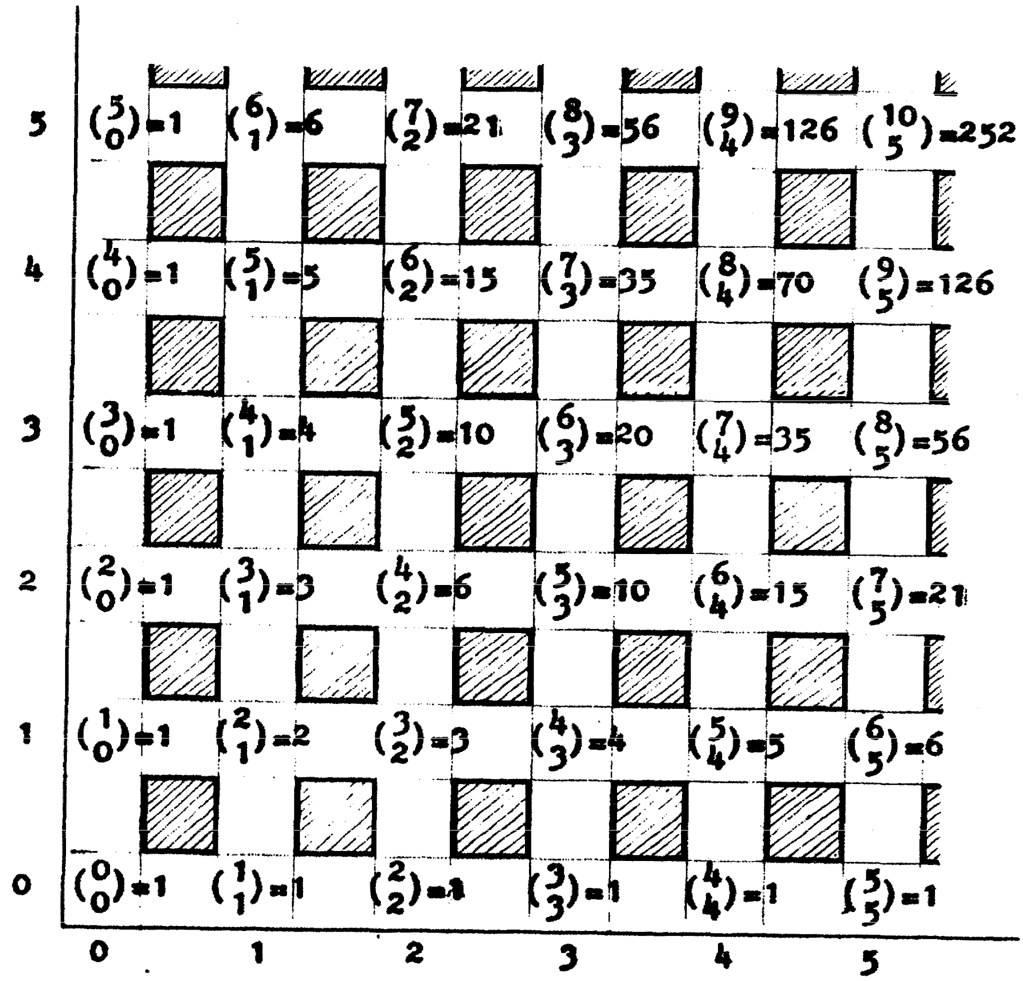


3.i. Finalment, l'alumne ha de ser capaç de raonar intuitivament que el nombre total de camins fins a un encreuament qualsevol $x = (m,n)$ és $\binom{m+n}{m}$.

4. Conseqüències.

Però seria absurd no aprofitar aquest problema no fent que l'alumne descubreixi les propietats del nombres combinatoris i el Triangle de Tartàglia.

4.a. L'alumne escriurà en cada un dels encreuaments el nombre combinatori que expressa el nombre de camins que arriben fins a ells.



4.b. Es demana a l'alumne que intuitivament digui quants camins condueixen fins els encreuaments (0,1), (0,2), (0,3), ..., (0,m). La seva resposta farà que indueixi la propietat:

$$\binom{1}{0} = \binom{2}{0} = \binom{3}{0} = \dots = \binom{m}{0} = 1$$

4.c. Igualment se li demana que intuitivament digui quants camins condueixen fins els encreuaments (1,0), (2,0), (3,0),..., (m,0), induint així la propietat:

$$\binom{1}{1} = \binom{2}{2} = \binom{3}{3} = \dots = \binom{m}{m} = 1$$

4.d. L'alumne escriurà simbòlicament un camí que condueixi fins $A = (4,3)$.
Per exemple: $(\rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow, \uparrow, \rightarrow)$.

Tot seguit se li demana que substitueixi els trams $\rightarrow$ per $\uparrow$, i els trams $\uparrow$ per $\rightarrow$. A quin encreuament condueix el nou cami $(\uparrow, \uparrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \rightarrow, \uparrow)$ obtingut?

Facilment respondrà que a l'encreuament $(3,4)$.

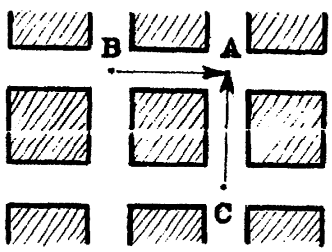
I a l'inrevés, se li farà comprendre que a partir d'un camí fins $(3,4)$ es pot obtenir igualment un camí fins a $(4,3)$.

I en consequència, deduir intuitivament que:

$$\left|\begin{matrix}\text{Número de camins} \\ \text{fins } (4,3)\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\text{Número de camins} \\ \text{fins } (3,4)\end{matrix}\right| \text{, es a dir: } \binom{7}{4} = \binom{7}{3}$$

Y en general: $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$, nova propietat dels nombres combinatoris.

4.e



El professor ajudarà a l'alumne en el següent raonament.

Tot cami fins $A = (4,3)$ ha de passar necessàriament, o bé per l'encreuament $B = (3,3)$ o bé pel $C = (4,2)$.

A més a més, si a un camí fins $B = (3,3)$ li afegim al final un tram $\rightarrow$, obtenim un cami fins A = (4,3):

$$(\rightarrow , \rightarrow , \uparrow , \uparrow , \rightarrow , \uparrow) + \rightarrow \;=\; (\rightarrow , \rightarrow , \uparrow , \uparrow , \rightarrow , \uparrow , \rightarrow)$$

cami fins B ((3,3)   camí fins A = (4,3)

Igualment, partint d'un camí fins C = (4,2), n'hi ha prou afegir al final un tram $\uparrow$, per obtenir un camí fins A = (4,3):

$$(\uparrow , \rightarrow , \rightarrow , \uparrow , \rightarrow , \rightarrow) + \uparrow = (\uparrow , \rightarrow , \rightarrow , \uparrow , \rightarrow , \rightarrow , \uparrow)$$

camí fins C = (4,2)   camí fins A = (4,3)

En conseqüència:

$$\left[\begin{array}{l}\text{Número de camins}\\ \text{fins } B = (3,3)\end{array}\right] + \left[\begin{array}{l}\text{Número de camins}\\ \text{fins } C = (4,2)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{Número de camins}\\ \text{fins } A = (4,3)\end{array}\right]$$

I per tant:

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$$

Tot seguit l'alumne haurà de sedimentar aquesta propietat, fent el mateix raonament per una altra terna d'encreuaments per a finalment deduir-ne la propietat general $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$, propietat aquesta que resulta ser molt poc intuitiva i de feixuga demostració per els alumnes en la seva presentació clàssica.

4.f. I ja finalment, aprofitar el problema per presentar, prescindint ja de carrers i encreuaments, el Triangle de Tartàgria com a síntesi de les propietats dels nombres combinatoris.