UNA PARADOXA TOPOLÒGICO-LINGÜÍSTICA

Josep Guia

> "L'adjacència és una propietat distintiva dels cossos que permet d'anomenar-los geomètrics en retenir aquesta propietat i fer-ne abstracció de la resta, siguen essencials o accidentals" ([6], pag. 168).

L'adjacència, pedra molar de la Geometria segons Lobachevski, és una relació simètrica ("A és adjacent de B si, i sols si, B és adjacent de A"), la qual cosa és una exigència excessiva per una noció que es pretén prendre com a primitiva d'una teoria -la Topologia- on s'hi fonamenta la Geometria i, per tant, l'Anàlisi.

S'hi imposa, doncs, desdoblar l'adjacència en dues proximitats orientades, no necessàriament simètriques, de manera que poguessem dir: "A i B són adjacents si, i sols si, A és pròxim de B o B és pròxim de A". La noció de proximitat esdevindria, així, la veritable noció primitiva de la Topologia. Abans de continuar, però, convé dir que aquesta objecció formal a la contundent i revolucionària afirmació que encapçala l'article és només això: una objecció de detall, una matització. La idea-força consisteix en adonar-se'n, com ho va fer Lobachevski, de quin era el fonament sobre el qual es desenvolupa el discurs geomètric.

La noció de proximitat, doncs, que no és simètrica, no és equivalent a la d'adjacència, i aquests aclariments de la terminologia i, amb ella, dels conceptes claus de la Matemàtica, són una tasca inexcusable. Altramet, com en el cas que ens ocupa, hom pot trobar-se amb paradoxes lingüístiques, això és, paradoxes perfectamet evitables mitjaçant un ús acurat, rigorós, dels mots.

En la Topologia, la noció de proximitat ha estat traduïda, indistintament, pels conceptes d'entorn i d'adherència, els quals són, en certa forma, mútuament recíprocs. Així, veiem que N. Bourbaki ([3]), pag. XII) diu:

"Si nosaltres partim del concepte físic d'aproximació, serà natural de dir que una part A d'un conjunt X és un entorn d'un element $\underline{a}$ de A (...) si tots els punts de X "suficientment pròxims" de $\underline{a}$ pertanyen a A".

Aleshores, hom axiomatitza l'espai topològic mitjançant les propietats (convingudes com a) bàsiques dels entorns:

E_1) Cada element x de l'espai X té almenys un entorn U_x, i cada U_x contè el punt x i és contingut en X.

E_2) Un subconjunt de X que contè un entorn d'un punt és també entorn d'aquest punt.

E_3) La intersecció de dos entorns d'un punt x de X és també un entorn de x.

E_4) Per a cada punt x de X i per a cada entorn seu U_x, existeix un altre entorn seu, U'_x, contingut en U_x, de manera que U_x és entorn de cada punt de U'_x.

Bourbaki tanca el cercle "noció primitiva-axiomàtica-concepte definit" tot dient:

"Per arribar a la noció d'entorn hem partit del concepte vague d'element "suficientment pròxim" d'un altre. Inversament, una estructura topològica permet ara de donar un sentit precís a la frase "tal propietat és certa en tots els punts suficientment pròxims de $\underline{a}$"; açò significa, per definició, que el conjunt de punts que tenen aquesta propietat és un entorn de $\underline{a}$ en l'estructura topològica en qüestió."

Amb això, resulta que un punt és pròxim d'un altre si pertany a tots els entorns d'aquest altre, i un conjunt és pròxim d'un punt si contè punts pròxims d'aquest punt. Aquest és l'ús "clàssic" de la terminologia proximal referida al límit d'una successió: "hi ha punts de la successió (arbitràriament) pròxims del punt límit" (o, dit d'altra manera, "la successió contè punts que pertanyen a qualsevol entorn donat del punt límit").

D'altra banda, A.D. Alexandrov ([1], v.3. pag. 193) diu: "El concepte d'adherència expressa la noció que un punt és infinitament pròxim d'un conjunt".

Aleshores, hom axiomatitza l'espai topològic mitjançant les propietats (convingudes com a) bàsiques de l'adherència:

K_1) L'adherència del conjunt buit és buida: $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

K_2) Cada subconjunt A de l'espai X és contingut en la seva adherència: $A \subset \overline{A}$

K_3) L'adherència de la unió de dos subconjunts, A i B, de l'espai X és continguda en la unió de les adherències de A i de B:
$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

K_4) Si un subconjunt A de X és contingut en l'adherència d'un altre B, aleshores també hi és continguda l'adherència de A:
$A \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

Amb això, resulta que un punt és pròxim d'un altre si pertany a l'adherència d'aquest altre, i un punt és pròxim d'un conjunt si pertany a l'adherència d'aquest conjunt. En el cas del límit d'una successió haurem de dir, doncs, que "el punt límit de la successió és pròxim de la successió".

En general, la traducció per entorns de la noció de proximitat és més pròpia del món bourbaquista-occidental i la traducció per adherències és bàsicament russo-oriental. Només cal, per comprovar-ho, fer una ullada als manuals de Topologia que tenen el bon gust pedagògic d'incloure-hi notes de caire epistemològic. I és evident que cal pronunciar-s'hi per una opció o per l'altra, car usar indistintament unes o altres expressions és suposar que la proximitat és una relació simètrica, i això només es pot fer en un determinat tipus d'espais. Aquests espais, que s'anomenen <u>espais R_0</u> d'ençà del treball d'A.S. Davis [4], són els que resulten caracteritzats pels quatre axiomes anterior i per, respectivament, el següent cinquè axioma:

E_5) Donats dos punts qualssevol de l'espai X, el primer pertany a tots els entorns del segon si, i sols si, el segon pertany a tots els entorns del primer.

K_5) Donats dos subconjunts qualssevol, A i B, de l'espai X, A conté punts adherents de B si, i sols si, B conté punts adherents de A:
$A \cap \overline{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cap B \neq \emptyset$

El món de la Topologia, però, no s'esgota a dintre dels espais R_0 (i el món-món encara menys!). Per això, dir que "tal és pròxim de qual" no és sinònim de dir que "qual és pròxim de tal". En això passa com en la vida: en les relacions humanes sovint entenem "estar pròxim de ..." com a "estimar a..." i sabem que la història de la humanitat s'és plena d'amors dissortats, no correspostos. La relació d'estima-proximitat no és, ai!, necessàriament simètrica.

A banda d'altres raons que s'hi puguen adduir (per exempla, la significació del mot "proximitat" en els Espais de Proximitat, de creació russa i acceptació generalitzada, la qual deixa gairebé sentencida la qüestió que ací ens plantegem), les formes "més naturals" d'introduir l'axiomàtica dels espais topològics avalen la traducció de la proximitat per adherències i no pas per entorns. Aquestes formes "més naturals" són les que axiomatitzen directament, sense traducció intemèdia, la noció de proximitat. En aquest sentit hi és el treball d'A. Appert [2] (un francès de l'escola de Fréchet i, per tant, oposat als bourbaquistes) i el més modern de D.B. Gauld [5] (neozelandès, si no vaig errat), que coincideix bàsicament amb el d'Appert, tot i que no el cita, i que té una expressa intenció pedagògica:

Un espai topològic és un conjunt X en el que introduïm una relació (de proximitat), δ, entre els punts de X i els subconjunts de X (<u>$x \,\delta\, A$</u> voldrà dir que x és pròxim de A), la qual relació acompleix els següents axiomes:

P_1) Cap punt no és pròxim del subconjunt buit:

$$x \,\delta\, A \Rightarrow A \neq \emptyset$$

P_2) Si un punt pertany a un subconjunt, aleshores n'és pròxim:

$$x \in A \Rightarrow x \,\delta\, A$$

P_3) Si un punt és pròxim de la unió de dos subconjunts, aleshores n'és pròxim d'un dels dos almenys:

$$x \ \delta \ (A \cup B) \ \Rightarrow \ x \ \delta \ A \ \vee \ x \ \delta \ B$$

P_4) Si un punt és pròxim d'un subconjunt i tots els punts d'aquest subconjunt són pròxims d'un altre subconjunt, aleshores el primer punt és pròxim d'aquest segons subconjunt:

$$x \ \delta \ A \ \wedge \ \forall a \in A, \ a \ \delta \ B \ \Rightarrow \ x \ \delta \ B$$

En aquest espai topològic tan planerament introduït, definirem l'adherència d'un conjunt, $A \subset X$, com el conjunt dels punts que li són pròxims, $\bar{A} = \{x/ \ x \ \delta \ A\}$, i direm que U_x és un entorn del punt $x \in X$ si, i sols si, x pertany a U_x i x no és pròxim de $X \setminus U_x$.

Veurem, finalment, la paradoxa lingüística anunciada. En l'espai topològic de dos punts, $X = \{x,y\}$, amb un d'ells, $\{y\}$, tancat (que vol dir que coincideix amb la seva adherència), resulta que:

a) Segons Borubaki, com que x pertany a tots els entorns de y, x és pròxim de y. I, com que y no pertany a un entorn de x, y no és pròxim de x.

b) Segons Alexandrov, com que y pertany a l'adherència de x, y és pròxim de x. I, com que x no pertany a l'adherència de y, x no és pròxim de y.

Què? Votem per Alexandrov?

REFERÈNCIES

1 Alexandrov, A.D. i altres. La Matemática: su contenido, métodos y significado. Alianza Editorial, 1973 (1ª edc: Moscu 1956).

2 Appert, A. Sur les topologies transitives. Bull. Acad. Roy. Belgique, 23 (1937) 135-142.

3 Bourbaki, N. Topologie Générale. Hermann, 1971 (Primera edició: Paris, 1940).

4 Davis, A.S. Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces. Amer. Math. Monthly 68 (1961) 886-893.

5 Gauld, D.B. Nearness - a better approach to topology. Math. Chronicle 7 (1978) 84-90.

6 Lobachevski, I.N. Collected works. Gosthehizdat, 1949.