EL TETRARIUS: UN EXEMPLE DE SUPERFICIES RECURSIVES A L'ESPAI

Albert Fàbrega
Sebastià Vila

<u>0. Introducció</u>.- El que segueix és resultat d'una experimentació amb ordinador que ja fa temps vam iniciar amb la construcció i estudi de les corbes recursives planes. Les més conegudes d'aquestes són les de Hilbert i Sierpinski, però n'hi ha d'altres com les corbes 'serpentejants' de Gosper i el 'floc de neu'.

Aviat se'ns va acudir de fer una cosa semblant a l'espai tridimensional, i així ens vam plantejar la següent situació. Sigui un tetràedre. Dividim cada una de les seves cares en quatre triangles iguals a partir del punt mig dels costats. Substituïm ara el triangle central per un tetràedre d'arestes igual a la meitat de la del tetràedre inicial (fig. 1).

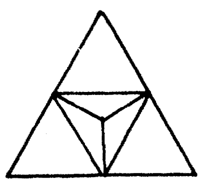


Figura 1

Cada cara de l'antic tetràedre dóna lloc a 6 nous triangles equilàters, als quals es pot aplicar de nou l'anterior construcció. I així 'ad infinitum'. A cada una d'aquestes superfícies en vam dir un 'tetrarius'. El tetràedre inicial essent el tetrarius d'ordre 0 i així successivament.

Va resultar que en un sentit ben definit -però no formalitzat-, en l'infinit els tetrarius es convertien en un cub en què les diagonals de les seves cares són les arestes del tetràedre inicial. Aquest és el resultat que presentem aquí.

<u>1. El cub com a límit de tetrarius</u>.- El que afirmem és que en un sentit informal, el cub és el límit de tetrarius.

Sigui T_n el tetrarius d'ordre n.

Sigui C el cub en el que una de les diagonals de les seves cares és aresta del tetràedre inicial T_0.

<u>Teorema</u>.- $\lim T_n = C$.

Sigui a_0 una aresta qualsevol d'un tetràedre qualsevol que forma part de T_i. Siguin c_{01} i c_{02} les dues cares adjacents a a_0. Indiquem per T_i^0 el tetràedre al qual pertany a_0. Diem que l'aresta a_{01} que pertany a T_{i+1} i que passa per m_{a_0} i l'aresta a_{02} estan en línia recta i són coplanàries amb a_0 (fig.2).

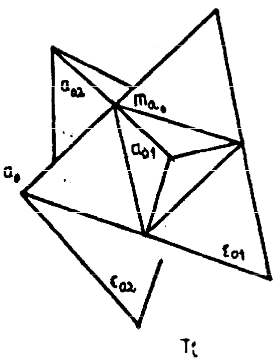


Figura 2

En efecte, a_0 i a_{01} determinen un pla π. Considerem ara la figura 3. α indica l'angle que forma una aresta amb el pla d'una cara del tetràedre i β l'angle diedre de dues cares del tetràedre. Tenim

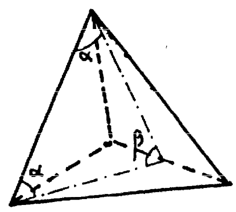


Figura 3

que $2\alpha + \beta = 180º$.

A més a més, a_{01} és perpendicular a a_0 ja que en el tetràedre l'altura va al centre de la base i aquest és també el centre de c_{01}, de forma que el pla π' determinat per a_{01} i la seva projecció a c_{01} és perpendicular a l'aresta a_0 (fig. 4).

Per tant, d'acord amb la figura 5, tenim que a_{02} és coplanària amb a_0 i a_{01}, i ja que també a_{02} és perpendicular a a_0, resulta que a_{01} i a_{02} són alineades.

Aplicant l'anterior argument a a_{01} tenim que a_{011} i a_{012} són alineades i coplanàries amb a_{01}.

Ja hem dit que el pla π' (fig. 6) és perpendicular a a_0 i a més és un pla bisector del diedre del tetràedre T^0_{i+1}. Per tant, l'angle de a_{011} amb π' es $\alpha + \beta/2 = 90º$. Així que no tan sols a_{011} i a_{012} són co-

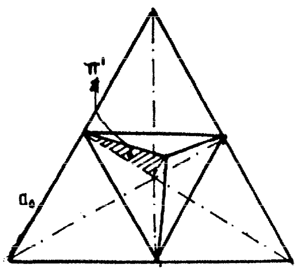


Figura 4

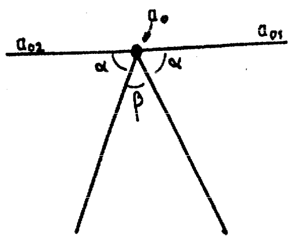


Figura 5

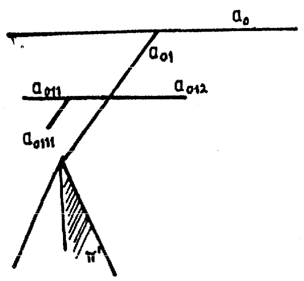


Figura 6

planàries amb a_{01} sinó també amb a_0.

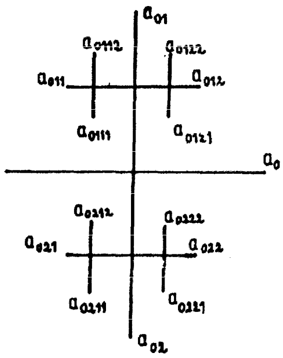
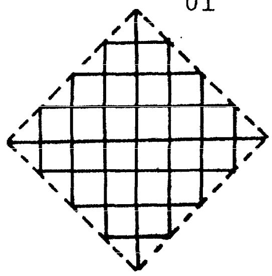


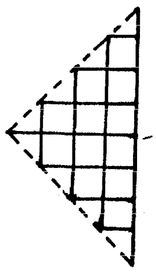
Figura 7

A partir d'aquí, veiem que a_{0111} i a_{0112} són coplanàries amb a_{011} i a_{01}, pla que també conté a a_0. Així que $a_0, a_{01}, a_{02}, a_{011}, a_{012}, a_{021}, a_{022}, a_{0111}, a_{0112}, a_{0121}, a_{0122}, \ldots$ etc. estan totes en un mateix pla. Cada aresta és la meitat de l'an terior i és perpendicular a l'an terior en el punt mig (fig. 7).

Per un argument semblant resulta que les arestes dels altres tetràedres construïts sobre c_{01}, són també en el mateix pla, ja que l'angles que formen amb c_{01} és el mateix que el que hi forma a_{01}.



Configuració a)



Configuració b)
Figura 8

Obtenim així, que cada aresta de T_0 dóna lloc a una configuració plana del tipus a) de la figura 8. Configuracions que, en el limit, donen un quadrat que té per diagonal l'aresta inicial a_0. Cada una de les 6 arestes de T_0 dóna lloc a un quadrat.

Ara bé, el pla π determi nat per a_0 ia $_{01}$, i el pla π' determinat per a'_0 i a'_{01}, tenen els punts M i N en comu (fig.9).

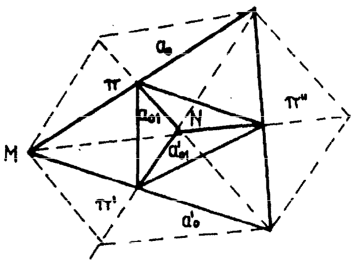


Figura 9

Tanmateix, els tres plans π, π' i π^{n} formen un triedre amb vèrtex a N. En conseqüència en conjunt es forma un poliedre amb 6 cares quadrades i per tant un cub que tanca T_n per qualsevol n.

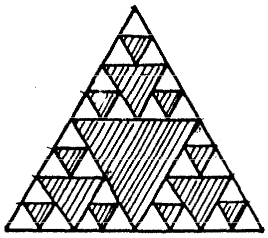


Figura 10

Suposem que en arribar al límit, queda alguna regió de l'espai interior al cub sense omplir. Si a la frontera d'aquesta regió hi ha un troç de cara d'algún tetràedre, en algún moment del procés, aquest troç serà cobert -totalment o parcial- per un nou tetràedre de nivell inferior, ja que donada una cara, el cobriment per tetràedres és total (fig. 10).

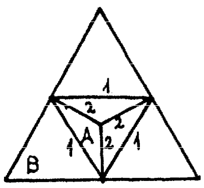


Figura 11

L'única possibilitat és que la frontera d'aquesta regió estiqui exclusivament formada per arestes de tetràedres. (Observem d'acord amb això, que el cub límit C, té les seves cares formades exclusivament per arestes de tetràedres).

Classifiquem en cada pas, les arestes de la següent forma: a l'enganxar un nou tetràedre, les arestes de la base seràn de classe 1 i les demés de classe 2 (fig. 11).

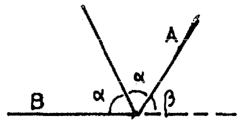


Figura 12

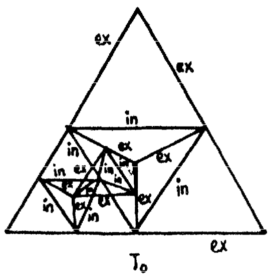


Figura 13

Fixem-nos en una aresta de classe 1. En els tetrarius següents aquesta aresta donarà lloc a una configuració b) pel que fa al triangle A i a una altra configuració b) pel que fa al triangle B. Però aquestes dues configuracions es superposen i no deixen espai entre elles, ja que $2\alpha + \beta = 180º$. (fig. 12). Així que per aquesta banda no hi ha forats. A aquestes arestes en diem de classe IN.

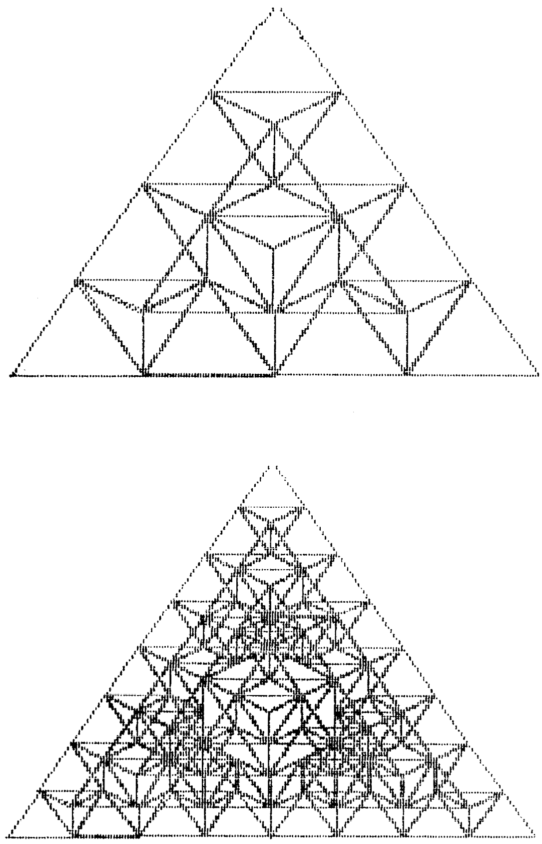
Pel que fa a una aresta 2, ens podem trobar que provingui d'alguna de classe IN anterior o no. (Una aresta prové d'una altra si un dels vèrtexs de la primera és el punt mig de la segona). Si és així, també l'aresta de classe 2 serà de classe IN. Si no és així, serà de classe EX (formada inicialment per les arestes de T_0). La figura 13 mostra clarament que una aresta de classe 2 serà EX si i només si prové d'una anterior de classe EX. Però és clar que les arestes de classe EX són totes elles a les cares del cub.

En conclusió, no hi ha regions interiors al cub no cobertes pels tetrarius. Dit d'altra forma, donada una regió D interior a C, llavors $D \subset \lim T_n$.

Resta en tot cas la possibilitat de què es produeixin solapaments. Però un càlcul senzill mostra que el límit de V_{T_n} (volum del tetrarius d'ordre n) és igual a V_C (volum del cub) i per tant T_n és una 'teselació' de C.

La figura 15 mostra una etapa en l'evolució d'una de les cares de T_0. Es una imatge obtinguda per computador.

La figura 16 mostra el procés de transformació del tetràedre en el cub a través dels tetrarius.



El tetrarius

Figura 15

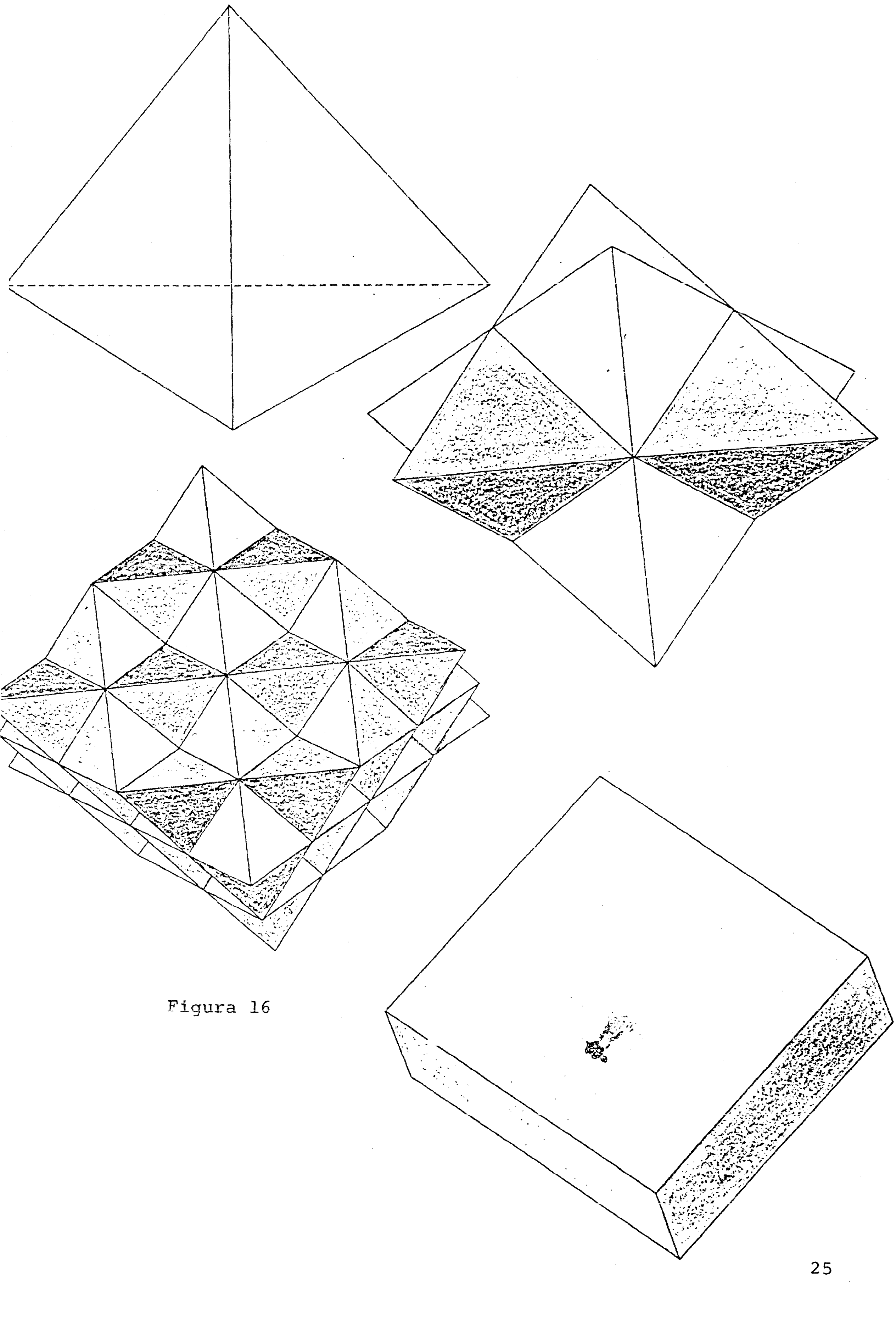


Figura 16