

PERIODES DE LES APLICACIONS CONTÍNUES
DE L'INTERVAL I DEL CERCLE

Jaume Llibre

En aquesta nota veurem que l'estructura del conjunt de períodes de les aplicacions contínues de l'interval i del cercle en ell mateix es coneix completament. Mentre que per a les aplicacions contínues de qualsevol altre graf (com dos cercles enganxats per un punt, o un conjunt en forma de Y, \dots) és un problema obert.

1. L'interval

Sigui $C(I)$ l'espai de les aplicacions contínues de l'interval tancat I en ell mateix. Sigui $x \in I$, direm que x és un punt periòdic de $f \in C(I)$ de període n si $f^n(x) = x$ i $f^k(x) \neq x$ per $k = 1, 2, \dots, n-1$. Definim l'òrbita de x com $\{f^n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Sigui $P(f)$ el conjunt dels enters positius n pels que f té un punt periòdic de període n . $P(f)$ és un subconjunt de \mathbb{N} , el conjunt dels naturals.

Considerem a \mathbb{N} l'ordre de Sarkovskii

$3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \rightarrow 2.3 \rightarrow 2.5 \rightarrow 2.7 \rightarrow \dots \rightarrow 4.3 \rightarrow 4.5 \rightarrow 4.7 \rightarrow \dots \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$

Afegim el símbol 2^∞ davant de totes les potències de 2, i

obtenim un ordre en el conjunt $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$. Amb aquest ordre el supremum de $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ és 3 i l'infim és 1.

Siguin $S_s = \{n \in \mathbb{N} : s \rightarrow n\} \cup \{s\}$ per a tot $s \in \mathbb{N}$ i $S_{2^\infty} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$. Aquests conjunts seran anomenats conjunts de Sarkovskii.

Teorema 1. (1) Si $f \in C(I)$ llavors existeix $s \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ tal que $P(f) = S_s$.

(2) Per a tot conjunt de Sarkovskii S_s existeix $f \in C(I)$ tal que $P(f) = S_s$.

(3) Sigui $C(I)$ l'espai topològic amb la topologia donada per la convergència uniforme. Si $f \in C(I)$ i $P(f) = S_s$ amb $s \neq 1$, llavors existeix un entorn V de f a $C(I)$ tal que per a tota $g \in V$, $P(g) \supset S_{\bar{s}}$ on \bar{s} és el següent de s amb l'ordre de Sarkovskii.

Corol·lari 2. Sigui $f \in C(I)$. Llavors

(1) $3 \in P(f)$ si i sols si $P(f) = \mathbb{N}$.

(2) Si $P(f)$ és finit llavors existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(f) = S_{2^n}$.

Notem que l'ordre de Sarkovskii és suficient per descriure l'estructura del conjunt de períodes de les aplicacions contínues de l'interval.

2. El cercle

Sigui $C(S^1)$ l'espai de les aplicacions contínues del cercle en el mateix. Pensarem en el cercle com el conjunt de punts del pla complex amb mòdul igual a 1.

Sigui $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ l'aplicació $e(x) = \exp(2\pi i x)$. Llavors direm que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una elevació de $f : S^1 \rightarrow S^1$ si el següent diagrama és commutatiu

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\
 e \downarrow & & \downarrow e \\
 S^1 & \xrightarrow{f} & S^1
 \end{array}$$

Es clar que f i F han de ser contínues.

Si F i F' són dues elevacions de f , llavors $F = F' + k$ per algun enter k . Existeix un enter G tal que $F(X + 1) = F(X) + G$ per a tot $X \in \mathbb{R}$. G s'anomena el grau de f i es denota $\text{grau}(f)$.

Sigui $C_G(S^1)$ l'espai de les aplicacions contínues del cercle en ell mateix de grau G .

(2.1) Resultats sense utilitzar el grau de l'aplicació $f \in C(S^1)$

Veurem que per descriure l'estructura del conjunt de períodes de les aplicacions $f \in C(S^1)$ necessitarem dos ordres, l'ordre de Sarkovskii i l'ordre usual.

Sigui $B_b = \{n \in \mathbb{N} : b < n\} \cup \{b\}$. Aquests conjunts se-
ran anomenats de Block.

Teorema 3. (1) Si $f \in C(S^1)$ i $1 \in P(f)$ llavors existeix $s \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$
i $b \in \mathbb{N}$ tal que $P(f) = S_s \cup B_b$.

(2) Per a tot conjunt de Sarkovskii S_s i conjunt de Block B_b existeix
 $f \in C(S^1)$ tal que $P(f) = S_s \cup B_b$.

Corol·lari 4 Sigui $f \in C(S^1)$. Llavors $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$ si i sols si
 $P(f) = \mathbb{N}$.

Notem que el Teorema 3 ens dona l'estructura de $P(f)$
només quan l'aplicació f tingui punts fixos.

(2.2) Resultats utilitzant el grau a l'aplicació $f \in C(S^1)$

Sigui $f \in C(S^1)$. Se sap que el nombre de punts fixos de f és més gran o igual que $|\text{grau}(f) - 1|$. Per tant, si el grau $(f) \neq 1$ llavors $1 \in P(f)$.

El resultat següent se segueix fàcilment del Teorema 3.

Corol·lari 5. Sigui $f \in C(S^1)$ i suposem que grau $(f) \neq 1$. Llavors

$$P(f) = \begin{cases} \mathbf{N} - \{2\} & \text{si grau}(f) = -2 \text{ i } 2 \notin P(f). \\ S_S & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

A més, $P(f) = S_S = \mathbf{N}$ si grau $(f) \notin \{-2, -1, 0, 1\}$.

Per tant, només ens queda per a estudiar l'estructura de $P(f)$ quan f és de grau 1.

Sigui $f \in C_1(S^1)$ i F una elevació de f . Com que grau $(f) = 1$ tenim que $F(X+1) = F(X)+1$ per a tot $X \in \mathbb{R}$. Si $x \in S^1$ és un punt periòdic de f de període n i $e(X)=x$ amb $X \in \mathbb{R}$, llavors $F^n(X) = X+k$ on k és un enter. Direm que $\frac{k}{n}$ és el nombre de rotació del punt x , i el denotarem per $\rho(x)$ o $\rho_F(x)$. Es pot comprovar que

$$\rho_F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^m(X) - X}{m}$$

Escriurem $L(f)$ o $L_F(f)$ per al conjunt de tots els nombres de rotació. Es pot demostrar que $L_F(f) = [a, b] \cap \mathbb{Q}$ amb $a, b \in \mathbb{R}$. Per tant, direm que $L_F(f)$ és un interval de rotació de f .

Sigui $f \in C_1(S^1)$ i $L_F(f) = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Si $a \in \mathbb{Q}$ i

$a = p/q$ amb $(p,q) = 1$, llavors definim $S(a) = q P(F^{q-p})$,
 on $P(F^{q-p})$ és el conjunt de períodes de l'aplicació
 $F^{q-p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, i per tant és un conjunt de Sarkovskii. El
 Teorema 1 és vàlid per a qualsevol interval I sempre que
 $f : I \rightarrow I$ tingui punts fixos. Si $a \notin \mathbb{Q}$ llavors definim
 $S(a) = \emptyset$. Similarment, si $b \in \mathbb{Q}$ i $b = r/s$ amb $(r,s) = 1$,
 llavors definim $S(b) = s.P(F^{s-r})$; i si $b \notin \mathbb{Q}$ llavors
 $S(b) = \emptyset$.

Sigui $M(a,b) = \{n \in \mathbb{N} : a < \frac{k}{n} < b \text{ per a algun } k \text{ enter}\}$. És clar que $M(a,b) = \emptyset$ si $a = b$.

El teorema següent completa la classificació de l'estructura del conjunt de períodes de les aplicacions contínues del cercle en ell mateix.

Teorema 6. (1) Sigui $f \in C_1(S^1)$ amb $L(f) = [a,b] \cap \mathbb{Q}$.

Llavors $P(f) = S(a) \cup M(a,b) \cup S(b)$.

(2) Per a qualsevol $S(a) \cup M(a,b) \cup S(b)$ existeix $f \in C_1(S^1)$ tal que
 $L(f) = [a,b] \cap \mathbb{Q}$ i $P(f) = S(a) \cup M(a,b) \cup S(b)$.

Corol.lari 7. Sigui $f \in C(S^1)$. Si $P(f)$ és finit llavors existeixen
 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $m \in \mathbb{N}$ tals que $P(f) = \{m, 2m, 4m, \dots, 2^n m\} = m S_{2^n}$

Corol.lari 8. Sigui $[a,b]$ un interval amb $a \neq b$. Llavors existeix
 $r \in \mathbb{N}$ i un subconjunt finit H dels naturals tal que

$$M(a,b) = B_r \cup \left(\bigcup_{h \in H} \{n \cdot h : n \in \mathbb{N}\} \right).$$

Tots aquest resultats proven que per descriure l'estructura del conjunt de períodes de les aplicacions contínues del cercle en el mateix, només necessitem dos ordres, l'ordre de Sarkovskii i l'usual.