CICLE DE CONFERÈNCIES "JOSEPH LIOUVILLE"

La Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències organitzà el curs passat un cicle de conferències en homenatge al matemàtic francès Joseph Liouville (1809-1882) en ocasió del centenari (amb un error de 3 anys) de la seva mort.

El calendari i el contingut del cicle foren els següents:

Dijous 14 de febrer del 1985

Xavier Mora (de la U.A.B.): El problema de Sturm Liouville.

Dijous 28 de febrer del 1985

Núria Vila (de la U.B.): Liouville i els nombres transcendents.

Dijous 14 de març del 1985

Jaume Llibre (de la U.A.B.): La integrabilitat de les equacions de la mecànica.

Dijous 28 de març del 1985

Santiago Zarzuela (de la U.B.): Integració en termes de funcions elementals: el teorema de Liouville.

Transcrivim a continuació els textos d'aquestes quatre conferències. Això es posible gràcies a l'amabilitat dels conferenciants als quals agraïm l'esforç que han fet per tal de lliurar-nos una versió escrita de les seves dissertacions.

LIOUVILLE I ELS NOMBRES TRANSCENDENTS

Núria Vila

En la sessió del dilluns 13 de Maig del 1844, Liouville comunicava verbalment a l'Acadèmia de Ciències de França algunes "remarques relatives à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques". D'aquesta manera neixia una nova branca de la Teoria de Nombres, la dedicada a l'estudi d'aquests nombres ni racionals, ni reductibles a irracionals algebraics, que s'anomenen nombres transcendents.

Liouville s'adonà que els nombres irracionals algebraics, és a dir, aquells que són zeros de polinomis amb coeficients enters, no poden estar, en cert sentit, massa a prop dels nombres racionals. Aquesta observació li va permetre construir efectivament, per primera vegada, nombres irracionals no algebraics, és a dir, nombres transcendents.

La distinció entre nombres racionals i nombres irracionals, així com la irracionalitat de certs nombres havia preocupat des dels antics. Particularment, l'estudi del número π, vinculat amb el problema clàssic de construir un quadrat amb àrea igual a la d'un cercle donat, té 4.000 anys d'antiguitat. D'altra banda, l'estudi del número π ha estat, sobretot des

'Euler, molt relacionat amb el d'un altre nombre, el número e. Així, mitjançant l'ús de fraccions contínues, Euler el 1737, provà la irracionalitat d'e i, el 1761, Lambert confirmà la de π.

L'estudi de les fraccions contínues i la seva utilització en l'aproximació d'irracionals per racionals va ésser molt desenvolupada el segue XVIII i molts resultats fonamentals en foren provats. Així Lagrange (1768) provà el teorema següent:

Si α és un nombre irracional quadràtic, aleshores la seva fracció contínua és periòdica a partir d'un cert rang i existeix una constant $c(\alpha) > 0$ tal que

$$| \alpha - /_q | > c(\alpha)\, q^{-2}$$

per a tot nombre racional $p/_q$.

Destaquem una mica el que ens diu aquest resultat: per racionals es pot aproximar tant com es vulgui per racionals, una aproximació amb error de l'ordre del invers del denominador al quadrat no es pot per tan fina com es vulgui per irracionals quadràtics.

D'altra banda, Dirichlet (1842) demostrà el conegut resultat:

Per a tot nombre irracional α existeix una successió infinita de racionals $p/_q$ tals que

$$| \alpha - p/_q | < 1/_{q^2}$$

Amb aquests precedents, Liouville (1844) provà el seu cèlebre resultat, que és una generalització del de Lagrange:

Si α és una arrel d'un polinomi irreductible de grau $n > 1$ amb coeficients enters, aleshores existeix una constant $c(\alpha)$ tal que

$$|\alpha - p/_q| > c(\alpha)/_{q^n}$$

per a tot nombre racional $p/_q$.

Liouville presentà aquest resultat a l'Acadèmia en termes de fraccions contínues. En la sessió del 13 de Maig del 1844, en comunicar el resultat, donà una primera prova, on utilitzava un resultat de Lagrange sobre fraccions contínues. En la sessió següent, 20 de Maig, donà una altra demostració independent del resultat de Lagrange. Finalment, en publicar el resultat, el 1851, (cf.[7].3), donà una formulació independent del llenguatge de fraccions contínues, tal i com s'ha enunciat aquí.

La demostració d'aquest teorema és sorprenentment fàcil, en efecte: Sigui $f(x) \in Z[x]$ un polinomi irreduïble de grau n tal que $f(\alpha) = 0$. És clar que $q^n f(p/_q)$ és un enter i per tant $|q^n f(p/_q)| \geq 1$. Podem suposar que $|\alpha - p/_q| \leq 1$, pel Teorema del valor mig s'obté que:

$$|f(p/_q)| = |f(\alpha) - f(p/_q)| \leq |\alpha - p/_q \; A|$$

on $A = \sup\limits_{|x-\alpha| \leq 1} |f'(x)|$.

La importància i transcendència d'aquest resultat rau sens dubte en que dóna el primer criteri efectiu per construir nombres transcendents. Així $\alpha = 0{,}11000100\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ és un nombre transcendent. En efecte, sigui $\alpha r = \sum_{n=1}^{r} 10^{-n!} = p/_q$,

$$p = 10^{F!} \sum_{n=1}^{r} 10^{-n!} \quad q = 10^{r!}, \quad p,q \in \mathbb{Z}, \ (p,q) = 1$$

$$|\alpha - \alpha_r| = |\alpha - p/_q| = \sum_{n=r+1}^{\infty} 10^{-n!} < 10^{(r+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}$$

$$< 10^{-(r+1)!}\, 2 = \frac{Z.\ 10^{-r!}}{q^r}$$

Ara, si $r \geqslant n$ i suficientment gran, $Z.\ 10^{-r!} < c(\alpha)$ i $|\alpha - p/_q| < \dfrac{Z.10^{-r!}}{q^r} < \dfrac{c(\alpha)}{q^n}$.

Per tant hi ha una infinitat de nombres racionals satisfent $|\alpha - p/_q| < c(\alpha)/_{q^n}$ i això contradiu el Teorema de Liouville. Per tant α no pot ésser arrel d'un polinomi irreductible amb coeficients enters de grau n, en conseqüència α és un nombre transcendent.

Molts d'altres nombres transcendents poden determinase utilitzant el Teorema de Liouville (cf.[7]), per exemple quantitats de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} k_n /_1 n!$, on els k_n són enters amb valor absolut acotat. 1 és un enter arbritati. Els nombres d'aquesta forma, és a dir, els nombres reals ξ aproximats per una successió de racionals p_n/q_n tals que $|\xi - p_n/q_n| < 1/_{q_n^{w_n}}$, on l.m sup $w_n = \infty$ s'anomenen nombres de Liouville i són transcendents.

Així doncs, podem dir que el Teorema de Liouville permet construir famílies infinites de nombres transcendents. Una altra qüestió diferent i en general molt més difícil és saber si certs nombres concrets, com π o e, són o no transcendents.

Fem notar que durant quasi 30 anus res de nou va ser afegit al resultat de Liouville, fins que Hermite (1873) va establir la transcendència d'e. Nou anys més tard, Lindemann (1882) publicà una demostracío de la transcendència de π. El resultat de Lindemann resol el problema clàssic de la quadràtura del cercel, mostrant definitivament que aquesta no és possible.

Citem també aqui que el 1874 Cantor demostrà que "quasi tots" els nombres són transcendents, amb ei que la classe de nombres transcendents és "molt estesa- tal i com Liouville deia en el títol de la seva Memòria.

Després de Lindemann res d'essencialment nou es va afegir a la Teoria de Nombres Transcendents durant gairabé 50 anys. Malgrat que alguns matemàtics eminents com Neierstrass, Hilbert, Harwitz es van interessar pels nombres transcendents, la seva aportació es va reduir a simplificar la demostració del Teorema de Lindemann.

En el Congrès Internacional de París del 1900, Hilbert proposà, com el setè dels seus 23 problemes, la qüestió de quan un logaritme irracional d'un nombre algebraic en una base algebraica és transcendent. Una manera equivalent de formular aquesta questió és dir si α^{β} ha d'ésser transcendent, éssent $\alpha \neq 0,1$ un nombre algebraic i β un algebraic irracional. Hilbert manifestà l'opinió de que la resolució d'aquet problema tindria més conseqüències en el futur que la demostració de la hipòtesi de Riemann o de l'últim Teorema de Fermat.

El primer avenç significatiu en aquesta direcció el donà Gelfond (1929) qui provà que α^{β} és transcendent en el cas d'ésser β un nombre quadràtic imaginari, utilitzant tècniques d'interpolació. En particular, $e^{\pi} = (-1)^{i}$ és transcendent. Desprès d'alguns altres resultats parcials, el 1934, Gelfond i Schneider, independentment, resolen completament el 7è problema de Hilbert mitjançant tècniques semblants a les que havia utilitzat Siegel en els seves investigacions sobre les funcions de Bessel. De fet, Gelfond i Schneider proven un resultat més general:

> Si $\alpha_1, \alpha_2, \pi_1, \pi_2$ són nombres algebraics no nuls tal que $\log \alpha,$ i $\log \alpha_2$ són linealment independents sobre Q, aleshores $p, \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2$ és diferente de zero.

A la vista d'aquest teorema sembla natural preguntarse si un resultat analeg seria també cert per a un nombre arbitrari de logaritmes de nombres algebraics no nuls. Això fou conjecturat pel propi Gelfond i fou provat per Baker, el 1966, qui a més determinà una cota inferior efectiva de
$|\beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_n \log \alpha_n|$.

Aquest resultat de Baker ha tingut una importància decisiva en el desenvolupament de la Teoría de Nombres Transcendents, car el disposar d'una cota efectiva té moltes conseqüències en altres problemes de la Teoria de Nombres, com per exemple en al resolució d'equacions diofàntiques i en la determinació dels cossos quadràtics imaginaris de nombre de classes 1.

(cf. [1], [2]). Les tècniques de demostració del resultat de Baker són extremadament difícils, diguem només que es tracta essencialment de donar bones acotacions dels valors de funcions analítiques convenients per a valors escaients de les variables (cf. [1]). Per aquestes importants i profondes contribucions, A. Baker fou Medalla Fields en el Congrès internacional del 1970. Assenyalem, finalment que aquest èxit de la Teoria de Nombres Transcendents ha motivat que aquesta sigui un dels temes de recerca actuals més actius (cf. [8], [9], [2]).

Reemprenem de nou el fil, destacant un altre aspecte del Teorema de Liouville. Aquest aspecte és el que fa referència a l'aproximació dels nombres algebraics per racionals, és a dir, el que s'anomena aproximació diofàntica. Liouville fou el primer en posar de manifest que hi ha una limitació en la manera d'aproximar els nombres algebraics per nombres racionals. El seu resultat, en aquest aspecte, no fou millorat fins el 1909 per Thue. Thue qui estava interessat en un problema diofàntic: Provar que l'equació $F(\underline{\bar{x}},\underline{\bar{y}}) = m$, on F és una forma binaria irreductible amb coeficients enters de grau >2, té un nombre finit de solucions, es và adonar que necessitava un refinament del Teorema de Liouville: el 1909 demostrà:

> Si α és un nombre algebraic de grau n i si $k>1+ n/2$, aleshores, existeix una constant $c(\alpha,k)$ tal que per a tot racional $p/_q$ és
>
> $$|\alpha - p/_q| > \frac{c(\alpha.k)}{q^k}$$

Després d'aquest resultat, els esforçcos es centraren en tractar de disminuir el valor de k. Així Siegel (1921), a la seva tesi, provà que es podia prendre $k > 25n$. Però el resultat realment espectacular el va aconseguir Roth el 1955 en demostrar que es pot prendre qualsevol $k > 2$ i, per tant, que k és independent del grau de α. Per aquest resultat Roth va ésser mereixedor de la Medalla Fields el 1958. Observis que a la vista del resultat de Dirichlet, aquest resultat de Roth és pràcticament immillorable.

Fem notar ara que els resultats de Thue, Siegel i Roth tenen tots ells una característica comuna:

En ells es prova l'existència de la constant $c(\alpha,k)$ però no es dóna cap mètode per calcular-la ni es té cap idea del seu valor. La no efectivitat d'aquests resultats té greus inconvenients quan es pretén aplicar-los a l ... olució d'equacions diofàntiques. Un primer resultat en aqu ... ecció el donà Feldemann, el 1971. Refinant els mètodes ... Feldemann va aconseguir donar un millorament "efec ... ema de Liouville:

Si α és un nombre algebraic de gr ... xisteixen constants calculables $c(\alpha$ ... $k(\alpha) < b$ i per tot racional $p/$ ...

$$|\alpha - p/q| > \frac{C(\alpha)}{q^k}$$

Per acabar ens proposem d' ... en la resolució d'una equació diofan... rem l'equació

$$x^3 - 2y^3 = n,$$

on n és un enter donat. Del teorema de Thue deduïm que per a tot nombre racional p/q, $q > 0$, és

$$|\sqrt[3]{2} - p/q| > \delta/q^{2.51}$$

per a algun $\delta > 0$. Siguin $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}\ (\frac{-1\ \ i\sqrt{3}}{2})$ i $\alpha_2 = \sqrt{2}\ (\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2})$, les arrels cúbiques complexes de 2. Notem que les parts imaginàries de α_1 i α_2 són més grans que 1. Aleshores,

$$|p^3 - 2q^3| = q^3 |\frac{p}{q} - \sqrt{2}| \cdot |\frac{p}{q} - \alpha_1|\ |\frac{p}{q} - \alpha_2|$$

$$> \delta \cdot q^{0.49}$$

En conseqüència ha d'ésser $q^{0.49} < \frac{|h|}{\delta}$, si $p, q, (q > 0)$ és una solució de l'equació inicial. Per tant, hi ha un nombre finit de solucions. El càlcul efectiu de les solucions passa necessàriament per la determinació d'una constant que pressuposa un millorament efectiu del Teorema de Liouville. En aquest cas concret, Baker (1964) provà que

$$|\sqrt[3]{2} - p/q| > \frac{10^{-6}}{q^{2.955}}$$

Per tant mitjançant l'ordinador es podran determinar les solucions d'aquesta equació per cada valor de n. Per exemple, si $|x^3 - 2y^3| \leqslant 10$, aleshores $|y| < 10^{156}$.

Finalment voldria tan sols esmentar d'altres aportacions de Liouville en el camp de la Teoria de Nombres, si bé cap d'elles ha tingut la transcendència i la importància de la aquí comentada. Citem, però, la gran quantitat d'articles de dedicats a: l'estudi d'algunes funcions aritmètiques com la suma de divisors, φ d'Euler, Γ de Legendre; resultats generals relatius a les funcions aritmètiques i sobre nombres primers en progressions aritmètiques concretes; sobre el nombre de representacions d'un nombre per formes quadràtiques cocretes; contribucions al problema de Waring.

També voldria per palès que fou ell que desxifrà les notes de Galois i en la Sessió del dia 4 de Juliol del 1834, comunicà a l'Acadèmia de Ciències de França la importància i profonditat dels resultats obtinguts per Galois, salvant, potser, així la seva obra de l'oblit.

Bibliografia

1. Baker, Transcendental Number Theory, Cambridge University Press, 1975.
2. D. Bertrand i d'altres, Les nombres transcendants on de l'effectivité en mathématiques pueres, C.I.M.P.A. 1983.
3. J. Dieudonné, Abrégé d'histoire des Mathématiques 1700-1900, Hermann, 1971.
4. G.H. Hardy and E.M. Wright, An introduction to the theory of Numbers, Oxford at the Clarendon Press, 1960.
5. K. Ireland, M. Rosen, A Classical Introduction to Modern Number Theory. Graduate Texts in Math., 84, Springer, 1980.
6. J. Liouville, Remarques relatives à des classes très-etendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle ni même reductible à des irrationnelles algébriques, Comptes Rendus, 18 (1844), 883-885.
7. J. Liouville, Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, no même réductible à des irrationelles algébriques, J.Math. pures et app. 16 (1851) 133-142.
8. D.W. Masser and G. Wüstholz, Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions, Invent. Math. 72 (1983) 407-464.
9. G. Wüstholz, Recent progress in transcendence Theory, Lecture Notes in Math. 1068, Springer 1983.
10. W.M. Schmidt, Diophantine Approximation. Lecture Notes in Math. 785, Springer, 1980.
11. H.M. Stark, An Introduction to Number Theory. The Mit Press, 1979.