

LA INTEGRABILITAT DE LES EQUACIONS DE LA MECÀNICA

Jaume Llibre

Universitat Autònoma de Barcelona

Les equacions diferencials de la mecànica poden ésser escrites en forma Hamiltoniana

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

on $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ són les coordenades de l'espai de fases \mathbb{R}^{2n} o d'un obert U de \mathbb{R}^{2n} , i $H:U \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable. Així una funció H defineix un camp de vectors

$$X_H = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

Anomenem *Hamiltonià* a la funció H i *sistema Hamiltonià* amb n graus de llibertat associat a H al sistema (1) de $2n$ equacions diferencials de primer ordre.

Sigui $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Definim el *parèntesi de Poisson* de F i H com la funció

$$\{F, H\} = X_H F = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial y_k} \right).$$

Una funció no constant F s'anomena *integral primera* del sistema Hamiltonià (1) o del camp de vectors X_H si $\{F, H\} = 0$. És fàcil verificar que si $(x(t), y(t))$ és una corba solució de (1) i F una integral primera, llavors $F(x(t), y(t)) = \text{constant}$.

En particular, H és una integral primera de (1). Per tant, en un sistema Hamiltonià amb 1 grau de llibertat el moviment té lloc a lo llarg de les corbes $H(x_1, y_1) = \text{constant}$. Així, conèixem completament les corbes solució de qualsevol sistema Hamiltonià de 1 grau de llibertat.

Per exemple, pel Hamiltonià $H(x_1, y_1) = \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \frac{1}{4}}}$, el seu retrat de fases sobre \mathbb{R}^2 vé donat a la Figura 1. L'origen és un centre ($H = -2$). Hi ha tres tipus més de solucions, les solucions A o òrbites periòdiques ($-2 < H < 0$), les dogues separatrius B o òrbites parabòliques perquè sorten i arriben a l'infinit amb velocitat zero ($H=0$), i les solucions C formades per òrbites hiperbòliques doncs sorten i arriben a l'infinit amb velocitat diferent de zero ($H > 0$).

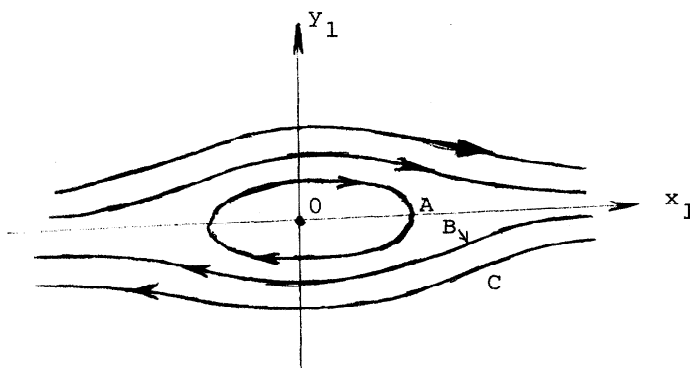


Figure 1

Direm que un conjunt de funcions F_1, F_2, \dots, F_r estan en involució si $\{F_j, F_k\} = 0$ per a tot $j, k \in \{1, 2, \dots, r\}$; i que són independents si els seus gradients dF_1, dF_2, \dots, dF_r són linealment independents.

Es natural fer-nos la següent qüestió: ¿Per a quins sistemes Hamiltonians de 2 o més graus de llibertat podem conèixer totes les seves solucions? Liouville va donar la millor resposta que tenim fins ara.

TEOREMA (Liouville, 1853). Si per a un sistema Hamiltonià amb n graus de llibertat conèixem n integrals primeres independents en involució, llavors el sistema és integrable per quadratures.

Liouville va arribar a aquest important resultat després de llargs treballs estudiant les equacions del moviment de un punt material o de un sistema de punts materials que es poden integrar, veura [L1], [L2] i [L3].

El teorema de Liouville engloba pràcticament tots els problemes de la dinàmica resolts fins avui. Arnold ha millorat el teorema de Liouville afegint-li la geometria dels sistemes integrables.

TEOREMA (Arnold, 1963). Sigüim F_1, F_2, \dots, F_n n integrals primeres independents en involució del sistema Hamiltonià (1) i I_{c_1, c_2, \dots, c_n} la varietat diferenciable definida per $F_1 = c_1, F_2 = c_2, \dots, F_n = c_n$ on (c_1, c_2, \dots, c_n) és un valor regular de l'aplicació $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Llavors

(1) I_{c_1, c_2, \dots, c_n} és invariant pel flux (és a dir, si una corba solució té un punt sobre la varietat I_{c_1, c_2, \dots, c_n} llavors esta completament continguda en ella).

(2) Cada component connexa de I_{c_1, c_2, \dots, c_n} és difeomorfa a $\mathbb{R}^k \times (S^1)^{n-k}$

amb $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

(3) El flux sobre cada component connexa de I_{c_1, c_2, \dots, c_n} és diferenciablement conjugat del flux translació sobre

$$\mathbb{R}^k \times (S^1)^{n-k} \quad (\text{és a dir, del flux } \varphi_t(x_1, \dots, x_k, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n) = \\ = (x_1 + tv_1, \dots, x_k + tv_k, \theta_{k+1} + tv_{k+1} \pmod{1}, \dots, \theta_n + tv_n \pmod{1}), \\ \text{on } v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}, \text{ i } \theta_{k+1}, \dots, \theta_n \in S^1).$$

Una demostració detallada d'aquest teorema es pot trobar a [AM]. Altres bones referències relacionades amb els sistemes Hamiltonians integrables o no, es donen al final.

Els apartats (1) i (3) del teorema anterior són deguts a Liouville i expressen amb més detall el seu teorema, veure [L3]. La aportació essencial de Arnold és l'apartat (2).

Per entendre que ens diu el teorema de Liouville-Arnold, considerem el Hamiltonià $H : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definit per $H(x, y) = \frac{1}{2} \|y\|^2 - \|x\|^{-1}$, on $\| \cdot \|$ denota la norma euclídea de \mathbb{R}^2 . El sistema Hamiltonià associat és

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{x}{\|x\|^3}. \quad (2)$$

Aquestes equacions diferencials defineixen el problema de Kepler, o problema del moviment de dos cossos sota la força de gravitació amb un dels dos cossos situats a l'origen de coordenades ($x=y=0$).

El sistema Hamiltonià amb 2 graus de llibertat (2) és integrable, doncs existeix un altre integral primera independenta i en involució amb H , el moment angular $C(x, y) = x \wedge y$.

Considerem els conjunts invariants

$$I_{hc} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 : H(x,y) = h \text{ i } C(x,y) = c\}.$$

Si (h,c) és un valor regular de la funció $H \times C$, llavors I_{hc} és una varietat diferenciable 2-dimensional. En aquest cas, utilitzant el teorema de Liouville-Arnold tenim que I_{hc} és difeomorfa a $S^1 \times S^1$ o $S^1 \times \mathbb{R}$ i que el flux sobre I_{hc} es diferenciablement conjugat al flux transl.lació sobre $S^1 \times S^1$ ó $S^1 \times \mathbb{R}$.

La Taula 1 ens descriu com les corbes solució omplen els conjunts I_{hc} , i les Figures 2 i 3 com les varietats I_{hc} folien l'espai de fases del problema de Kepler, per més de talls veure [CL].

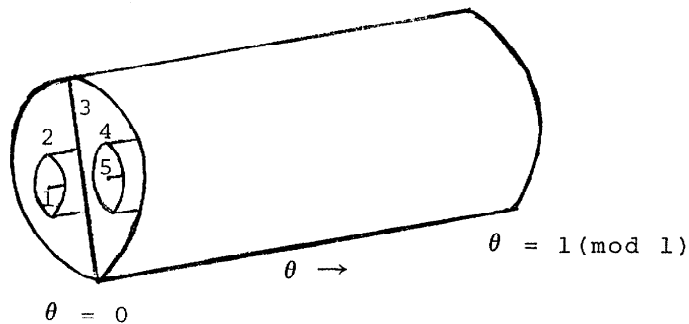


Figure 2. El conjunt $I_h = \bigcup_c I_{hc}$, amb $h < 0$, és un tor sol·lid obert.

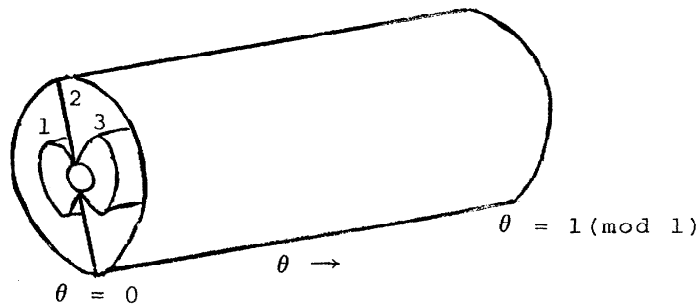


Figure 3. El conjunt $I_h = \bigcup_c I_{hc}$ amb $h \geq 0$ és un tor solid obert que li falte un altre tor solid tancat en el seu interior.

Referencies

- [AB] R. Abraham i J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin, Reading, Massachusetts, 1978.
- [A1] V.I. Arnold, Proof of A.N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian, Russian Math. Surveys 18 (1963) 9-36.
- [A2] V.I. Arnold, Small divisor problems in classical and celestial mechanics, Russian Math. Surveys 18 (1963) 85-192.
- [A3] V.I. Arnold, Méthodes Mathématiques de la Mécanique classique, Mir, Moscou, 1976.
- [AA] V.I. Arnold i A. Avez, Problèmes Ergodiques de la Mécanique classique, Gauthiers-Villars, Paris, 1967.
- [CL] J. Casasayas i J. Llibre, Qualitative analysis of the anisotropic Kepler problem, Memoirs of the Amer. Math. Soc. 312, 1984.

- [L1] J. Liouville, Sur quelques cas particulier où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer, première mémoire, J. de Math. Pures et Appl. 11 (1846) 345-378; second mémoire, J. de Math. Pures et Appl. 12 (1847) 410-444.
- [L2] J. Liouville, L'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels, J. de Math. Pures et Appl. 14 (1849) 257-299.
- [L3] J. Liouville, Sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique, présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853, J. de Math. Pures et Appl. 20 (1855) 137-138.
- [M] J. Moser, Stable and random motions in dynamical systems, Ann. Math. Studies 77, 1973.
- [SM] C.L. Siegel i J. Moser, Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, 1971.

Hamiltonià	Moment angular	Topologia de I_{hc}	I_{nc} esta format per
$h < 0$	$c = -(-2h)^{-1/2}$	S^1	una òrbita circular retrograde
	$c \in (-(-2h)^{-1/2}, 0)$	$S^1 \times S^1$	un conjunt de S^1 òrbites periòdiques retrogrades (el.lípse)
	$c = 0$	$S^1 \times \mathbb{R}$	un conjunt de S^1 òrbites d'ejecció - col.lisió
$h = 0$	$c \in (0, (-2h)^{-1/2})$	$S^1 \times S^1$	un conjunt de S^1 òrbites periòdiques directes (el.lípse)
	$c = (-2h)^{-1/2}$	S^1	una òrbita circular directa
	$c \in (-\infty, 0)$	$S^1 \times \mathbb{R}$	un conjunt de S^1 òrbites parabòliques retrogrades de captura-escap
$h > 0$	$c = 0$	2 còpies de $S^1 \times \mathbb{R}$	<ul style="list-style-type: none"> { un conjunt de S^1 òrbites parabòliques d'ejecció-escap { un conjunt de S^1 òrbites parabòliques de captura-col.lisió
	$c \in (0, \infty)$	$S^1 \times \mathbb{R}$	un conjunt de S^1 òrbites parabòliques directes de captura-escap
	$c \in (-\infty, 0)$	$S^1 \times \mathbb{R}$	un conjunt de S^1 òrbites hiperbòliques retrogrades de captura-escap
$h < 0$	$c = 0$	2 còpies de $S^1 \times \mathbb{R}$	<ul style="list-style-type: none"> { un conjunt de S^1 òrbites hiperbòliques d'ejecció-escap { un conjunt de S^1 òrbites hiperbòliques de captura-col.lisió
	$c \in (0, \infty)$	$S^1 \times \mathbb{R}$	un conjunt de S^1 òrbites hiperbòliques directes de captura-escap.
	$c \in (-\infty, 0)$	$S^1 \times \mathbb{R}$	un conjunt de S^1 òrbites hiperbòliques retrogrades de captura-escap

Taula 1. Els números es corresponen amb de les Figures 2 i 3.