BIOGRAFIA

Marston Morse (1892-1977)

Marston Morse pot comptar-se entre els matemàtics nord-americans més importants d'aquest segle. Els seus treballs, tots al voltant d'un mateix tema, conegut avui per "teoria de Morse", s'han aplicat a diversos camps de la matemàtica.

Marston Morse va néixer el 1892 a Waterville (Maine). Va educar-se al Colby College i a la Universitat de Harvard on va obtenir el grau de Doctor (Ph. D.) l'any 1917. Va donar classes a Harvard durant un període de temps molt curt, ocupació que va haver de deixar per a complir les seves obligacions militars a la primera guerra mundial. Acabada aquesta, va tornar a Harvard. Va obtenir una plaça permanent de professor a Cornell l'any 1920, cinc anys després va passar a Brown i el 1926 va tornar a Harvard. El 1934 va publicar el llibre "The calculus of variations in the large" (Amer. Math. Soc.) on recull sistemàticament tot el seu treball que avui es coneix com a "teoria de Morse". El 1935 passa a l'Institut for Advanced Study de Princeton on va romandre fins la seva mort.

Va estar matemàticament actiu fins al final de la seva vida. El seu últim llibre ("Global variational analysis: Weierstrass integrals on a Riemannian manifold", Math. Notes, Princeton Univ. Press, 1976) va ésser publicat un any abans de la seva mort.

Comentarem, ara, breument la teoria de Morse i les seves aplicacions a diversos camps de la matemàtica. Aquesta teoria té dues parts ben diferenciades: una part que nosaltres anomenarem "teoria elemental" i una segona part que podríem anomenar "teoria de Morse dels espais de corbes".

La teoria elemental relaciona els punts crítics d'una funció sobre una varietat diferenciable amb propietats topològiques de la varietat. Sigui M una varietat diferenciable (de dimensió finita). Sigui $f:M \longrightarrow R$ una funció diferenciable. Un punt crític de f és, per definició, un punt en el qual s'anul.len totes les derivades parcials de la funció (respecte a un sistema qualsevol de coordenades). El punt crític es diu no degenerat si l'Hessià en aquest punt és una forma quadràtica no degenerada. La teoria elemental de Morse només estudia funcions amb punts crítics no degenerats. Aquestes funcions s'anomenen "funcions de Morse".

Un punt crític no degenerat x_o de f es diu que té índex k si l'índex de la forma quadràtica determinada per l'Hessià és k. El resultat fonamental de la teoria elemental és el següent:

" Sigui $f:M \longrightarrow R$ una funció de Morse (M compacte). Per a $c \in R$ designem per $M_c = \{x \in M$ tals que $f(x) \leq c\}$. Sigui x_o un punt crític de f; posem $a=f(x_o)$. Suposem que no existeix cap altre punt crític x_1 de f amb $a=f(x_1)$. Llavors, per a ε petit,

a) L'homologia relativa $H_i(M_{a+\varepsilon}, M_{a-\varepsilon})$ és zero si $i \neq k$,

b) $\dim H_k(M_{a+\varepsilon}, M_{a-\varepsilon}) = 1$ "

Aquest resultat s'estén immediatament al cas en què existeixin diversos punts crítics de f, $x_o, x_1, \ldots$, tals que $f(x_o) = f(x_1) = \ldots$

Com es pot veure aquest teorema relaciona propietats d'un punt crític d'una sola funció f amb propietats topològiques de M. Aquest enunciat que hem donat aquí és la versió primitiva de Morse; posteriorment Bott, el 1959, va donar-ne una altra que situa el teorema a un nivell homotòpic.

La teoria elemental ha tingut diverses aplicacions a altres branques de la matemàtica. Jo vull mencionar-ne aquí dues: En primer lloc l'aplicació a l'estudi de l'estabilitat de sistemes dinàmics; la utilització de la teoria de Morse en el següent resultat d'Smale és fonamental: " Tota varietat compacta suporta un sistema dinàmic estructuralment estable". Un segon camp en què la teoria elemental s'aplica amb gran èxit és la Mecànica Celest i especialment l'estudi dels punts d'equilibri relatiu en el problema de n cossos.

La segona part de la teoria de Morse, que nosaltres anomenem "teoria de Morse dels espais de corbes", és una aplicació de la teoria elemental als espais $\Omega_{p,q}$ de corbes que uneixen dos punts p i q d'una varietat de Riemann (M,g). Sobre $\Omega_{p,q}$ considerem la funció energia E que a cada corba $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq 1$, que uneix p amb q, li fa correspondre el número

$$E(\alpha) = \int_o^1 \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \, dt.$$

Abans teniem una funció $f: M \longrightarrow R$ on M era una varietat diferenciable de dimensió finita. Ara tenim la funció energia $E: \Omega_{p,q} \longrightarrow R$ on $\Omega_{p,q}$ no és pas de dimensió finita. No obstant, en aquest cas, es pot desemvolupar una teoria anàloga. Els punts crítics de la funció energia resulten ésser les geodèsiques que uneixen p i q. L'estudi del comportament de E en els punts crítics (geodèsiques) dóna lloc a resultats molt interessants.

Aquesta segona part de la teoria s'aplica a diversos camps de la matemàtica. Mencionem aquí l'estudi d'existència de geodèsiques tancades sobre una varietat diferenciable. Aquest és un vell problema que, arrencant amb Poincaré, ha centrat l'atenció de molts matemàtics, entre ells el mateix Marston Morse. Recentment, Klingenberg ha provat que sobre tota varietat compacta, simplement conexa, hi ha una infinitat de geodèsiques tancades.

Joan Girbau