Un problema sobre triangles pitagòrics

Una terna pitagòrica és una terna (x,y,z) de nombres enters positius que satisfan l'equació diofàntica: $x^2 + y^2 = z^2$. El nom de "pitagòrica" s'associa immediatament amb el teorema de Pitàgoras, que permet establir una correspondència bijectiva entre les ternes pitagòriques i els <u>triangles pitagòrics</u>; és a dir, amb els triangles rectangles tals que les longituds dels seus costats poden ser donades per tres nombres enters. Tanmateix avui sabem que les ternes pitagòriques van ser estudiades pels matemàtics babilònics més de 1.000 anys abans de l'època en que va viure Pitàgoras.

Durant segles els matemàtics es van ocupar de problemes relacionats amb els triangles pitagòrics (veure, per exemple, la "History of the Theory of Numbers" de L.E. Dickson, Vol.II, Cap. IV) i els seus esforços van contribuir de manera important al desenvolupament de la teoria de nombres (veure: Solved and Unsolved Problems in Number Theory" de D. Shanks, Cap. III).

Reiniciant, d'alguna manera, aquesta antiga tradició, vaig a proposar un problema sobre triangles pitagòrics que, segons crec, no ha estat proposat fins arà.

Sigui $T = (x,y,z)$ un triangle pitagòric. És fàcil provar (fer-ho!) que $3|xy$ és a dir, $x = 3x'$ o $y = 3y'$. Direm <u>rombe associat a T</u> al rombe que té per diagonals $2x'$ i $2y$ o $2x$ i $2y'$, segons que $x = 3x'$ o $y = 3y'$.

Direm, abusant força del llenguatge, que els costats de un polígon són <u>consecutius</u> si les seves longituds estàn representades per dos nombres enters consecutius.

<u>Problema</u>. Provar que no existeixen: un triàngle pitagòric T de catets consecutius i un rectangle R de costats consecutius, tals que l'àrea del rombe associat a T sigui igual a l'àrea de R.

Pascual Llorente