

LA HISTÒRIA, UNA EINA ESSENCIAL PER
A LA DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES.

Grup d'Historia i Didàctica de les Matemàtiques

" La ciència creix per processos mixtos d'anàlisi i de síntesi. Tots aquests processos romanen ocults en les exposicions sintètiques de la Ciència utilitzades sovint en l'ensenyament. Cercant una economia d'exposició que acostuma a ser més aventajosa per qui exposa que per qui la rep, s'ha anat accentuant cada cop més la separació entre dos processos que mai no haurien d'haver-se divorciat: el de la gènesi dels coneixements i el de la seva transmissió.

(Puig Adam)

1.- Les Matemàtiques, un sistema deductiu?

Aprendre matemàtiques, ensenyar-les, fer-ne'n, ... són formes verbals que adquireixen significats en un determinat marc social i econòmic que predisposa els individus a una determinada línia de treball, i al mateix temps crea una expectativa que apunta a l'assumpció d'objectius extramatemàtics. Prescindir d'aquest context social és fer abstracció d'allò que ni és superflu ni secundari, sinó essencial per a fer de l'activitat matemàtica una qüestió intel·ligible i comprensible des d'un punt de vista teleològic.

Des del Reneixement les matemàtiques han esdevingut una eina indispensable per a poder aprofundir en qualsevol disciplina científica. Darrerament han adquirit fins i tot un rol de primera magnitud en camps tradicionalment allunyats d'ella, i tan diferents (aparentment) com la Biologia i l'Economia. Fet i fet, les mate -

matètiques mai no han gaudit de tan valor social com en l'època actual, valor reconegut en la insistent preocupació de la majoria de pares quan pregunten: com va el nen en matemàtiques? I no obstant, què succeeix per que les matemàtiques siguin un terreny aspre, i per què no dir-ho, poc grat, per a la majoria d'alumnes que cursen estudis mitjans, adquirint molts d'ells una definitiva aversió per aquesta matèria? Pensem que no es pot cloure aquest interrogant amb la clàssica resposta: les matemàtiques són difícils i tan sols alguns cervells privilegiats poden accedir als bastidors dels seus arcans.

Si difícil fou per a Poincaré i Hadamard endinsar-se en l'estudi del problema d'explicitar els factors intel·lectuals que intervenen en l'acte del descobriment matemàtic, no ho seria menys l'estudi dels factors que poden fer de les matemàtiques un objecte apassionant o una matèria que suscita l'avversió. I en canvi la qüestió no està exempta d'un gran interès des del punt de vista de la didàctica...

Quines matemàtiques oferim als nostres alumnes per a desenvolupar el seu interès, i convertir l'energia infantil en acció? La simple contemplació d'un rosari de teoremes i resultats, que es van erigint com un gran gratacel, pot engrescar els alumnes a interessar-se per aquesta construcció? O per ventura seria preferible transmetre la idea que "darrera d'un problema interessant, potser s'oculta una construcció harmoniosa, bella i elegant? Qui vol embarcar-se en aquest dubtós potser?".

El que avui són teoremes que, sustentats els uns amb els altres, conformen una teoria d'una branca matemàtica foren en algun

temps una sèrie de problemes per resoldre que en el curs de molts tempteigs van anar configurant un coneixement més profund del tema. Més endavant la necessitat de sintetitzar els resultats més importants i d'ordenar-los, així com el de vestir-los amb rigor, va delinir una forma concreta de presentar aquells resultats als matemàtics professionals amb un llenguatge específic, molt allunyat de l'emprat en el transcurs de la resolució. Aquest procés que s'ha anat repetint al llarg dels temps no és el que es presenta als estudiants, sinó que ens limitem a oferir el producte acabat, que és molt més fred i sovint exempt d'un significat directe i intuïtiu. No és cert que moltes de les matemàtiques que presentem apareixen com una gran tautologia, molt allunyada del terreny dels problemes que suscitaran tal o qual teoria? I el llenguatge emprat, no se sembla per desventura a una semiòtica per a entesos, completament aliena a la psicologia dels alumnes que l'estudien? No estarem fent com aquella casta de sacerdots egipcis, que disposaven d'un doble llenguatge matemàtic, l'un secret per a usar entre ells i perfectament intel·ligible, i l'altre obscurantista i màgic, destinat a la població per a suscitar una admiració i reconeixement d'autoritat i de poder?

En els últims temps ha predominat la tendència a enfocar l'ensenyament de les matemàtiques des d'un punt de vista lògicodeductiu, començant, des dels primers estadis d'estudi, per establir un llenguatge específicament matemàtic, el conjuntista, a partir del qual poder assentar els conceptes aritmètics, geomètrics, després algebraics, etc ... Semble prou evident que les preocupacions per a fonamentar les matemàtiques, suscitades a començament del nostre segle no són alienes a la presentació lògicodeductiva

que comentavem. No és objectable l'ordenació dels resultats matemàtics a partir de l'esquema anterior que unifica amb un mateix llenguatge i amb unes mateixes bases, branques aparentment allunyades de les matemàtiques. Aquesta síntesi està feta per aquells matemàtics professionals que necessiten posar ordre en tots els descobriments anteriors, i estructurar-los, esporgant d'ambigüetats els distints teoremes i demostracions. Però, servirà el mateix esquema com a línia orientativa de l'aprenentatge de les matemàtiques, per a aquells no acostumats a tractar amb aquestes?

Les matemàtiques pensades com un gran i únic edifici que es pot anar construint d'una vegada per totes, és una idea que està en contradicció amb la dinàmica real d'aquesta construcció que requereix constants remodelacions i reconstruccions. Si comencem a delinear unes extenses bases per a fonamentar l'edifici matemàtic en l'aprenentatge, la forma i sentit d'aquests fonaments potser seran molt clars per a l'arquitecte que imagina l'estructura acabada, però quin sentit hi trobaran aquells infeliços incapaces d'imaginar l'estructura global de l'edifici? No hi veuran una gran arbitrarietat i un contrassentit, que pugnarà amb el seu sentit comú i amb la necessitat de simplificació? No serà preferible construir provisionalment i reconstruir més endavant d'acord amb les necessitats que es presentin en l'aprofondiment matemàtic?

2.- Reivindicant la Història de les Matemàtiques

Les Matemàtiques com un gran i únic edifici deductiu és una idea tan falsa com captivadora per la seva esquemàtica simplificada. Aplicada a l'ensenyament, en particular, va cristal·litzar

en un nucli ideològic perillosament coherent: els nombrosos fracassos que es produeixen en l'aprenentatge de les matemàtiques, pensaven i deien fa vint anys els partidaris de la "matemàtica moderna", són deguts essencialment als defectes i mancances de les presentacions clàssiques mancades de definicions prou precisses, del llenguatge formal imprescindible i de plantejaments prou generals, així com plenes de deduccions inadmissibles des del punt de vista del rigor. Una de les obligacions necessàries d'un bon ensenyament de les Matemàtiques era, per tant, ensenyar unes Matemàtiques proveïdes d'una estructura deductiva com cal. Si oferim a la contemplació dels estudiants un sistema inundat de veritat indubtable, cap intel·ligència normalment constituïda el deixaria d'entendre.

La coherència d'aquest sistema d'idees és més aparent que real. Pressuposa una sèrie de característiques sobre els mecanismes d'aprenentatge que són falses, alhora que es recolza en una visió parcial de les Matemàtiques; una visió que elimina els processos creadors que necessàriament, com hem dit més amunt, sempre han precedit l'organització axiomàtico-deductiva de qualsevol branca de les Matemàtiques.

La història de les Matemàtiques és fonamental per a arribar a capir quins són els trets més significatius i més pertinents d'aquesta disciplina, especialment per a arribar a tenir una visió realista de la gènesi dels seus conceptes i principals resultats. Qualsevol dels conceptes considerats "claus" de les Matemàtiques té darrera seu una història llarga i sovint molt complexa. Però és una història fèrtil, una història feta de petits o grans avenços a través de diferents estadis de desenvolupament. En cada un dels seus estadis de desenvolupament, aquests conceptes (límit, funció, deri-

vada, equació, grup, etc.) funcionaven i resolien determinats problemes. Era, precisament, la necessitat de resoldre nous problemes el que feia que els conceptes assolissin nous estadis, que fossin refinats, que llurs definicions esdevinguessin més precises. Una cosa semblant passa amb els resultats o teoremes. La majoria d'ells han estat, d'entrada, conjectures sense més contingut que una gran evidència "empírica", entenent aquest mot en sentit estricte. Entenent, per exemple, que una sèrie de relacions com $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$, etc., fan evident la relació $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) = x^n + \dots$, la qual, per la seva banda, fa evident la conjectura que un polinomi de grau n tindrà exactament n arrels, iguals o repetides reals o no. Després, els resultats rebien un primer recolzament teòric per una sèrie de demostracions discutibles. Apareixia, finalment, una demostració (o demostracions) sobre la validesa de la qual existia el consensus dels millors matemàtics de l'època. Àdhuc aquestes demostracions, però, han pogut ser considerades incompletes ponderades amb els criteris de rigor lògic d'èpoques posteriors, especialment si aquestes estaven prou allunyades en el temps de la primera. Durant tot aquest procés, però aquests resultats encara no provats o malprovats no deixaven d'estar presents i d'actuar dins del conjunt de coneixements matemàtics. Per exemple, que un polinomi té un zero real sempre que pren valors positius i negatius va ser una cosa utilitzada per tothom, Gauss inclòs, sense cap demostració, sense que ningú, fins ben entrat el segle 19, mai no tingués el sentiment que calia perdre el temps demostrant una cosa així.

Des d'aquest punt de vista, el conèixer la història de les matemàtiques hauria de ser obligat pel futur llicenciat en Matemàtiques: és el contrapès necessari a la formació universitària ac -

48

tual que destaca excessivament la organització lògico-deductiva dels resultats matemàtics ja assolits.

Si important seria que qualsevol professional de les Matemàtiques tingués una bona perspectiva històrica per tal que la comprensió dels aspectes culturals, filosòfics i científics de la seva disciplina fos més completa i menys unilateral, pot ser encara ho seria més assegurar aquella perspectiva en els futurs professors de Matemàtiques. Cinc anys de llicenciatura i cap experiència docent fan que el mestre, quan comença la seva vida professional, no tingui d'altres criteris didàctics que els que bona ment pot extreure de la seva experiència com alumne i de la concepció que s'haurà format d'allò que la seva assignatura, com a ciència, és. I succeeix moltes vegades, a més, que aquesta experiència i aquesta concepció primeres extreus de la Universitat, que hauran dirigit els millors i més il·lusionats esforços de recerca didàctica de molts ensenyants, cuallen finalment en una sèrie d'idees i actituds conservadores, desproveïdes ja del poder actiu que tenien de bon principi, però amb un poder passiu considerable, és a dir amb una notable capacitat per a justificar una certa pràctica més o menys rutinària.

Al costat del paper genèric que acabem de descriure dins de la formació dels llicenciats en Matemàtiques, la seva història té dues funcions específiques i fonamentals dins de la seva didàctica. Una, la més coneguda, és la de font de dades històriques més o menys rellevants o curioses que motiven l'alumne i que ajuden a trencar la monotonia acadèmica. Aquesta vessant és prou evident i s'està imposant a tot arreu sense dificultats. Només cal dir al respecte que aquesta direcció de treball pot generar esfor

ços malaguanyats per poc ambiciosos. L'interès principal d'utilitzar dades històriques concernents a autors i resultats de les Matemàtiques no rau en l'element de distracció i curiositat que una anècdota introdueix dins d'una classe, tot i que això és bo. La història d'una ciència ha de servir per a alguna cosa més que per a explicar "batalletes" i anècdotes fora de context. Ha de ser pensant en desvetllar en els alumnes el complex procés interdisciplinar de formació del coneixement científic, ha de ser pensant en posar al seu abast alguns exemples importants d'interrelació fèrtil entre la ciència i la cultura, ha de ser pensant en donar-los elements que els ajudin a entendre les múltiples i subtils relacions i condicionaments que sempre han existit entre la ciència i la tècnica, l'economia i les ideologies, ha de ser pensant en aquesta àmplia dimensió cultural com cal integrar els punts de referència històric dins d'una bona didàctica.

La segona funció específica que correspon a la història de les Matemàtiques dins de l'ensenyament és el d'eix de referència i element fonamentador de processos d'aprenentatge. Per a entendre la importància que nosaltres atorguem a aquesta funció, cal tenir present les següents consideracions. L'ensenyament de les Matemàtiques que parteix de concebre-les com un gran edifici deductiu calca la introducció dels conceptes i el desenvolupament dels temes a ensenyar d'alguna de les possibles organitzacions axiomàtico-deductives que el tema pot rebre. La "didàctica" d'aquest tipus d'ensenyament es redueix a buscar exemples que il·lustren les definicions i a esmicolar més o menys les demostracions. Un procés d'aprenentatge d'aquestes característiques sempre serà defectuós perquè identifica la lògica del pensament real amb la

50

lògica deductiva d'una teoria organitzada axiomàticament. Un procés així no té en compte les característiques del desenvolupament de la capacitat lògica de l'alumne, que depèn de l'edat, i generarà tot sovint conflictes d'inadequació entre el que és ensenyat i el que l'alumne realment pot aprendre. Aquesta perspectiva mai no té en compte les dificultats del qui aprèn i els obstacles reals que ha de superar per fer seus uns coneixements, els quals, en general, no tenen res a veure amb les dificultats que sorgeixen a l'hora d'encabir-los dins d'una estructura axiomàtico-deductiva.

En front d'aquests plantejaments, les veus que reclamen una alternativa són cada vegada més nombroses. Desgraciadament, però, la majoria de treballs i de materials didàctics que pretenen ser-ho són elaborats sense cap més criteri que la experiència docent i la intuïció. Alguns d'ells, obsessionats pel caràcter deformatiu de la matemàtica moderna i dels plantejaments didàctics associats a ella, es veuen més preocupats per donar una nova imatge de les matemàtiques que per l'eficàcia formativa de la nova didàctica que es vol impulsar. D'altres es veuen innecessàriament preocupats per arribar a ensenyar els conceptes matemàtics tal i com apareixen formalitzats en qualsevol manual ordinari. Es tractaria, per exemple, d'arribar, a través de l'anàlisi de molts casos concrets, a la definició de funció per parelles ordenades, de la de límit per èpsilons, etc. Aquest inductivisme d'anar per casa no està tan lluny com sembla de la concepció formalista de la didàctica: el que pretén és trobar la manera de fer pair les mateixes coses.

No hi haurà sinó una manera de bastir una estructura eficaç per a l'ensenyament de les Matemàtiques en els nivells bà-

sic i mitjà: tenint en compte les dades que la moderna psicologia de la intel·ligència proporciona sobre els diferents estadis de desenvolupament de la capacitat lògica atravesats per qualsevol individu des de la infantesa fins a assolir la intel·ligència adulta. La història de les Matemàtiques, desvellant els processos de constitució dels conceptes i resultats, apareix com una eina didàctica imprescindible dins d'aquesta perspectiva: a partir d'ella es poden conèixer les limitacions i possibilitats que té un determinat enfocament d'un tema, fins a on es pot arribar amb tal o tal grau d'abstracció, què donarà de si un concepte només presentat dins de certs casos particulars, quins conceptes estan "naturalment" relacionats entre si, fins a on es pot portar l'estudi d'un determinat problema sense ultrapassar un marc donat de plantejaments de tal grau de concreció, etc., etc. Una eina capaç de proporcionar uns eixos de referència adequats i potents per a superar el ductivisme esterilitzant i l'empirisme naïf.

El plantejament que aquí estem defensant es recolza en l'anomenat principi genètic, defensat, entre d'altres, per H. Poincaré, F. Klein, Toeplitz i, en el nostre país, per Rey Pastor i Puig Adam. Segons aquest principi, cada individu atravesà més o menys les mateixes etapes conceptuals que atravesà històricament la humanitat. El tret rellevant d'una metodologia inspirada en aquest principi és que pressuposa que cada individu haurà de superar dificultats intel·lectuals semblants a, o relacionades amb, les dificultats que han estat vençudes en tots els problemes centrals de la història de la ciència.

Ha de ser sobre la superació d'aquestes dificultats que cal vertebrar l'aprenentatge de les disciplines científiques. Allò

que dóna lloc a un més gran aprofundiment de la matèria que hom estudia no és la seva exposició ordenada lògicament, sinó l'enfrontar-se directament amb els problemes rellevants. És el redescobriments dels fets allò que millor prepara l'individu, que aprèn, per a assumir íntegrament el contingut d'una determinada teoria matemàtica. És clar que això requereix una més forta intervenció de l'alumne en el seu propi procés d'aprenentatge, i que queda subvertit el principi d'adquirir un màxim de coneixements en un mínim de temps. Però creiem que el problema de l'aprenentatge no és un problema de quantitat d'informació, especialment en l'ensenyament mitjà.

3.- El treball del G.H.D.M.

En el Grup d'Història i Didàctica de les Matemàtiques, dins d'aquestes coordenades genèriques, hem estat estudiant la gènesi i el desenvolupament dels conceptes algebraics fins als inicis de la geometria analítica. Hem analitzat el procés històric pel qual l'aritmètica esdevingué àlgebra, i com aquesta, de ser una simple part superior de l'aritmètica, esdevingué una eina potentíssima i molt apropiada per a ser aplicada a problemes, els geomètrics que superaven el marc tradicional de la geometria sintètica clàssica. La primera part del nostre treball, que serà publicat per l'I.C.E. de la Universitat Autònoma de Barcelona, està actualment en premsa.

Podem destacar algunes conclusions respecte a l'ensenyament de l'àlgebra en els darrers cursos de l'E.G.B. i els primers del B.U.P.:

- i) No és convenient accedir directament a l'ús de lletres per a

designar incògnites ni a les regles per a la resolució d'equacions de primer i segon grau sense haver desenvolupat abans suficientment els mètodes aritmètics de resolució dels tradicionals problemes de plantejament. L'ús delletres i les regles associades a la resolució d'equacions no han d'apareixer com un joc de mans que funciona bé, sinó com un mecanisme d'automatització de certs processos d'operativitat numèrica que es repeteixen sistemàticament en el transcurs de la resolució d'un ventall molt gran de problemes aritmètics. Tan sols en el moment que es pren consciència de la reiteració de certes operacions en un mateix ordre, estarà preparat el terreny per a automatitzar la resolució amb els simbolismes i regles pertinents.

ii) El llenguatge algebraic no té res de natural ni de evident. És un error de conseqüències greus introduir-lo prematurament i fer-ho d'una vegada per a totes. Assolir una bona comprensió de les regles del càlcul literal és un important problema didàctic que cal resoldre poc a poc i sense introduir aquestes regles des de fora de l'alumne. És bo que en les etapes inicials cada alumne es doti de les seves pròpies simplificacions (que, al principi, seran una mena de taquigrafia), per procedir després a la unificació de simbolismes per conveni.

iii) En una primera etapa, les demostracions de les regles algebraiques no poden sustentar-se en el càlcul literal, doncs els mecanismes intel·lectuals que entren en joc en una demostració d'aquestes característiques ultrapassen la capacitat de qualsevol alumne amb menys de 14 -15 anys. Cal explotar el recurs al rànament aritmètic o geomètric, de contingut menys abstracte que el càlcul literal. Educar l'esperit per a servir-se dels esquemes

geomètrics, per tal de veure les relacions que s'estableixen entre determinades magnituds i variables, pot donar molt bons resultats, a part d'establir una pràctica que sempre serà vàlida. No fer servir els ulls en les matemàtiques es tancar una finestra que pot ser molt necessària per a poder veure després sense necessitat d'usar la vista.

iv) El sentit que s'atorga a la idea de demostrar un resultat matemàtic sofreix una evolució molt forta fins a assolir una etapa madura. En els primers estadis, una persona normal i corrent, en té prou per a satisfer les seves exigències de validesa amb comprovar i veure si el resultat funciona en diferents casos concrets. Cal respectar aquest sentiment cada vegada que sigui impossible arribar a fer veure la necessitat d'un montatge més elaborat per a justificar el resultat en qüestió. Serà molt més interessant dedicar-se a explotar les conseqüències que hom podrà extreure d'aquesta "veritat" (indubtable) als ulls de l'alumne), que no trencar una progressió d'aprenentatge per tal de calmar el nostre particular orgull rigorístic. Més endavant la necessitat d'una fonamentació més ferma apareixerà per ella mateixa en l'esperit dels alumnes, i serà aleshores quan esdevindrà plenament eficient l'esforç que caldrà esmerçar-hi.

Per concloure, a manera de resum, podríem dir que hem arribat a la conclusió que cal capgirar la perspectiva i l'orientació de les Matemàtiques que s'ensenyen a l'E.G.B. i al B.U.P. Capgirament radical de l'esquema axiomàtico-deductiu com a model de referència per a la ciència que pretenem ensenyar. Amb això no farem sinó seguir els consells d'un mestre il·lustre: "Fer deva-

llar del més alt els conceptes de l'Anàlisi és didàcticament equivocat, històricament absurd, conceptualment hipertròfic i científicament inútil." (Rey Pastor, Elementos de Análisis Algebraico).

Lluís Bibiloni
Antoni Malet
Joan Miralles
Jaume Paradís
Pelegrí Viader