

GEOMETRIA NO EUCLIDIANA: D'EUCLIDES A GAUSS

Sebastià Xambó

El 1759 d'Alembert (1717-1813) havia escrit que

La definició i les propietats de la línia recta,
així com de les línies paral·leles, són l'escull
i, per dir-ho així, l'escàndol dels elements de
la Geometria.

Quasi cinquanta anys més tard el gran Lagrange (1736-1813)
escrigué una memòria sobre les paral·leles. En presentar-la a
l'Acadèmia francesa va interrompre la seva lectura i exclamà:

Il faut que j'y songe encore!

Quina és la natura de les dificultats que impedièn a mate-
màtics de la categoria d'un Lagrange "veure-hi clar" en el proble-
ma de les paral·leles, vell ja de més de dos mil anys? Vist re-
trospectivament, la raó matemàtica fonamental ben possiblement
és que el pla hiperbòlic no es pot sumergir isomètricament d'una
manera completa en l'espai ordinari. És aquest un resultat que
Hilbert publicà el 1901 en les Trans. AMS i que el podeu trobar
per exemple en l'apèndix V del seu llibre "Les fondements de la
Géométrie" (Dunod, Paris, 1971). (De fet, és conegut que no exis

teixen immersions de classe C^2 , però que en canvi existeixen immersions de classe C^1 . Aquest darrer resultat és de Kuiper i el publicà a les Indagations Math. Vol. 17 (1955), pàg. 683).

Hi hagueren d'altres dificultats, de natura no matemàtica. Entre elles cal mencionar la creença que la geometria euclidiana és la descripció vertadera de l'espai físic. Aquesta creença, estretament relacionada amb les formes d'intuïció de l'espai, amaga, o tendeix a ignorar, la natura lògica del problema d'una fonamentació rigurosa de la geometria elemental.

L'objecte d'aquestes notes és de fornir una certa perspectiva històrica de les formes concretes que han adoptat les dificultats esmentades en el llarg període "prehistòric" de les geometries no euclidianes, o sigui, anterior a la publicació dels primers escrits sistemàtics per J. Bolyai i Lobatschewski. Aquest període acaba amb Gauss, qui per bé que desenvolupés extensivament una geometria no euclidiana al llarg del primer quart del segle XIX i que s'adonés que aquesta era igual a l'euclidiana davant del problema dels fonaments, no obstant no publicà pràcticament res sobre el tema fora de la seva correspondència. En aquest període prehistòric hi inclou també Taurinus, conegut per haver proposat un model de la geometria hiperbòlica basat en la trigonometria esfèrica.

ELS ELEMENTS

La història de les paral·leles va començar pels voltants de l'any 300 A.C., quan Euclides escrigué els tretze volums dels seus Elements. Ja aleshores hi havia a Grècia una rica tradició matemàtica i es pot considerar que els Elements sistematitzen una part important d'aquest coneixement. Una mica esquemàticament podem dir que els sis primers llibres tracten respectivament, de triangles, rectangles, cercles, polígons, proporcions i semblança, que els quatre següents s'ocupen de teoria de nombres (per exemple, la infinitat dels nombres primers o la irracionalitat de $\sqrt{2}$). Els tres darrers es destinen a la geometria de l'espai i de diversos cossos, com ara piràmides, cons, cilindres i els cinc poliedres regulars.

Abans d'Euclides s'havia anat perfilant la noció de demostració, però només s'havia usat d'una manera aïllada. Euclides la usà metòdicament i per aquest fet s'el considera com l'introduïdor del mètode axiomàtic en les matemàtiques. Concretament, parteix de 23 definicions i enuncia 5 postulats i 5 nocions comunes i sistemàticament demostra centenars de proposicions. Per nosaltres serà suficient de considerar breument els postulats i algunes de les 48 proposicions del llibre I. Pel que fa a les definicions, algunes són explicacions sobre el que realment són termes primitius (com ara "el punt és el que no té extensió") i altres són definicions en el sentit corrent, com ara la defini-

ció de cercle, centre i diàmetre (definicions 16, 17 i 18) i la de rectes paral·leles (definició 23).

Els cinc postulats són:

- 1.- Que es pot menar una recta d'un punt qualsevol a qualsevol altre punt.
- 2.- Que es pot perllongar contínuament un segment de recta en línia recta.
- 3.- Que es pot traçar un cercle amb qualsevol punt per centre i de qualsevol radi.
- 4.- Que dos angles rectes són iguals.
- 5.- Que si dues rectes són tallades per una transversal de manera que la suma dels angles interns d'una mateixa banda sigui inferior a dos rectes, aleshores les dues rectes es tallen de la banda de la transversal en què la dita suma és inferior a dos rectes.

Les quatre primeres nocions comunes són realment propietats formals de la igualtat. La quinta és "el tot és major que la part".

Entre les proposicions del llibre I que més ens interessa

remarcar hi ha:

- P. 4.- Criteri CAC de congruència de triangles (1) (*)
- P. 8.- Criteri CCC. (2)
- P.10.- Existència de punt mig d'un segment.
- P.11.- Existència d'una recta perpendicular a una recta
i
- P.12 donada menada des d'un punt donat.
- P.16.- Un angle exterior d'un triangle és superior a qual
sevol dels angles interior oposats.
- P.17.- dos angles d'un triangle sumen menys de dos rectes.
- P.26.- Criteris ACA i CAA (3)
- P.27.- Dues rectes són paral.leles si existeix una trans-
i
- P.28 versal que fa amb elles angles interns alterns
iguals.
- P.29.- Recíproc de la proposició 28 (per primera vegada
empra el postulat V).
- P.30.- Transitivitat del paral.lelisme.
- P.32.- Els angles d'un triangle sumen dos rectes.
- P.47.-
i
- P.48 Teorema de Pitàgores i recíproc.

L'ideal dels Elements

L'ideal que Euclides perseguia en els Elements no era assolit de bon troç. Aquest ideal, essència del mètode axiomàtic,

(*) Vegeu les Notes al final

és que una demostració no és correcta si en ella hi intervenen nocions que no siguin o bé primitives o bé que s'hagin definit prèviament a partir de les primitives, ni si s'empren enunciats que no siguin o bé postulats o bé nocions comunes o bé proposicions justificades ja prèviament.

Derivant com deriven les nocions geomètriques de formes d'intuïció arrelades en experiències sensibles, les dificultats per desenvolupar la geometria elemental seguint les estrictes prescripcions del mètode introduït per Euclides són paleses. Alguns d'aquests perills Euclides els superarà magistralment. En molts d'altres la mateixa intuïció geomètrica el va trair. Posaré alguns dels exemples més visibles.

En la P.1 (construcció d'un triangle equilàter de costat donat) presuposa un axioma de continuïtat.

En la P.4, criteri CAC, empra la noció de "superposició de figures", quan la noció de moviment no està justificada en el seu sistema i menys que les propietats d'una figura restin invariants en el moviment. (Per cert, que Euclides estava preocupat per l'ús d'aquest principi es dedueix del fet que quan pot passar-se'n, ho fa, encara que la demostració resultant sigui molt més complicada).

Moltes demostracions són arguments sobre un diagrama, com en la proposició 10 (existència de punt mig d'un segment), en la

que presuposa que la recta CC' (fig. 1) talla la recta AB en un punt interior al segment AB .

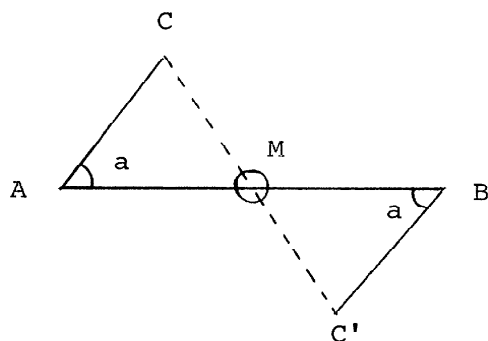
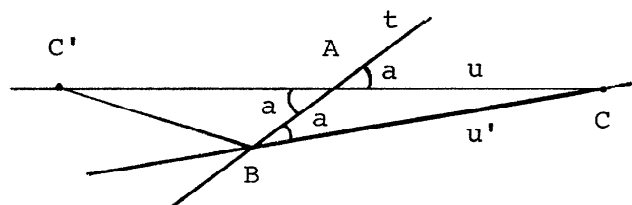


Figura 1

L'ideal d'Euclides no fou assolit en forma completa fins a final del segle XIX. De tots els sistemes proposats, el més pròxim en esperit al sistema d'Euclides és el proposat per Hilbert en el seu Fonaments de la Geometria (1899) (vegeu l'edició de Dunod citada abans o la versió escrita de la conferència d'en Girbau).

La posició del Postulat V

El paper jugat pel Postulat V en els Élements es descombreix examinant les proposicions 27, 16, 17 i 29.



Demostraré la P.27 fent servir la P.4 ; en els Elements es procedeix d'una altra manera. Considerem dues rectes u i u' que admeten una transversal t' que forma amb elles angles interns alterns iguals (fig. 2). Siguin A i B els punts d'intersecció de t amb u i u' , respectivament.

Raonarem per l'absurd. si u i u' no fossin paral·leles, aleshores tindrien un punt C en comú. Podriem prendre C' sobre u tal que $AC' = AC$ i aleshores, per la P.4, els triangles BAC' i ABC serien congruents. S'en dedueix de seguida que $C'BA$ és suplementari de l'angle a i per tant que C' està sobre la recta u , la qual cosa contradueix el primer postulat.

Corol·lari: dues rectes perpendiculars a una tercera són paral·leles.

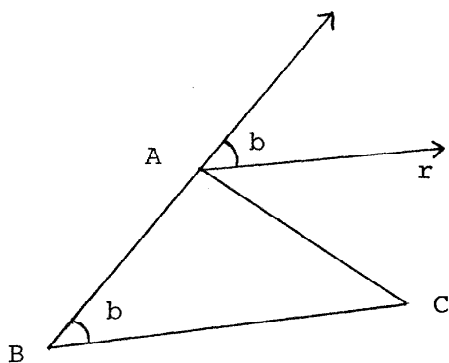


Figura 3

Per demostrar la P.16, tracem el raig r d'origen A i formant un angle b amb el raig $\overrightarrow{AB}$ (fig. 3). Aquest raig és paral·lel a BC , per la P.27, de manera que no talla el segment BC . Per tant el raig r no és entre els raigs AB i AC .

Per demostrar la P.17, mireu la fig. 4 on veiem que $a + b < a + b' =$ un recte.

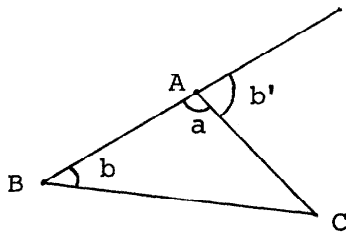


Figura 4

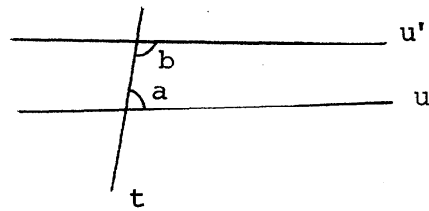


Figura 5

Considerem ara dues rectes u i u' , com en la fig. 5 i una transversal t que forma angles interiors d'un costat a i b . Aleshores del que hem dit tenim que:

- Si $a + b = \text{dos rectes}$, u i u' són paral.leles.
- Si u i u' es tallen del mateix costat de t que els angles a i b , aleshores $a + b < \text{dos rectes}$.

Aquí és on es veu que si Euclides vol evitar la possibilitat que es dongui una situació on $a + b < \text{dos rectes}$ i on no obstant u i u' són paral.leles, té necessitat d'emprar un postulat addicional. El postulat que ell escull és el postulat V. El fet de reconèixer explícitament la necessitat d'un tal axioma per evitar l'existència de més d'una paral.lela el converteixen, irònicament, en el primer geòmetre que hagi pogut entreveure la possibilitat d'una geometria no euclidiana.

Crítiques posteriors del postulat V

Els successors d'Euclides foren més euclidians que Euclides, en

el sentit que durant segles estigueren convençuts, per raons diverses, que el postulat V s'hauria de poder demostrar, i molts cregueren que l'havien demostrat. El parany en què queien adopta sempre la forma d'emprar en l'argument, d'una manera més o menys implícita, una proposició que consideren evident però que no està justificada lògicament dins del sistema axiomàtic d'Euclides. A posteriori ha resultat que aquestes proposicions són enunciats equivalents al postulat V.

Tolomeu (segle II DC)

Pren dues paral·leles, una transversal i angles interns d'una banda a i b (fig. 6).

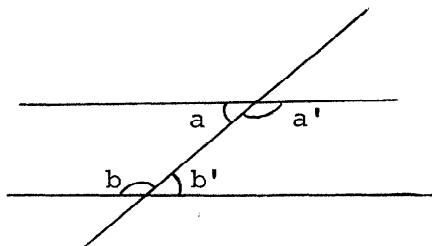


Figura 6

Vol demostrar que $a + b =$ dos rectes. Per Tolomeu és evident que si $a + b$ fos major que dos rectes, aleshores també ho seria per qualsevol altra transversal de qualsevol altre parell de paral·leles. En particular $a' + b'$

seria superior a dos rectes, d'on s'en deriva una contradicció.

Proclus (410-485)

Sobre el Postulat V escrigué:

S'hauria d'esborrar de la llista de postulats, ja

que és un teorema que involucra moltes dificultats i que Tolomeu, en un cert llibre, es va proposar de resoldre. L'enunciat que si dues rectes convergeixen més i més arribaran a interseccar-se és plausible, però no necessari.

Proclus addueix l'exemple d'una hipèrbola i una assíptota que s'apropen indefinidament sense tallar-se. Una raó que dóna Proclus, per reforçar la seva creença que el Postulat V és un teorema, es que no li sembla possible que una proposició la inversa de la qual és demostrable no sigui ella mateixa demostrable.

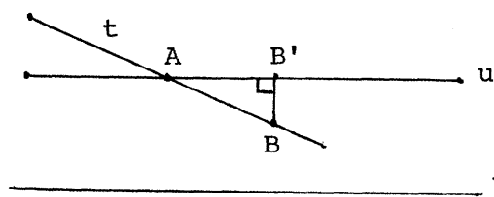


Figura 7

La demostració que proposa Proclus és la següent (vegeu la fig. 7). Sigui u i u' paral·leles, A un punt de u i t una recta per A distinta de u . Pren un punt B sobre t , entre u i u' , i el punt B' , peu de la perpendicular a u per

B . Quan B s'allunya indefinidament de A , BB' creix indefinidament. Per tant, diu Proclus, com la distància entre u i u' és finita, arribarà un moment que B serà sobre u' .

Wallis (1616-1703)

Suposa que per a tot triangle n'hi ha un altre semblant ar-

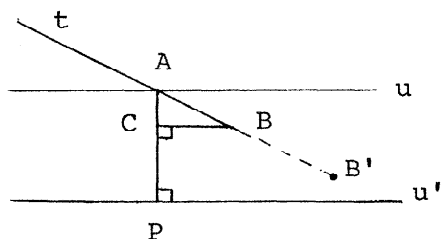


Figura 8

bitràriament gran i amb aquesta premisa demostra el Postulat V així (vegeu la fig. 8): Sigui P el peu de la perpendicular a u' per A , sigui t una recta per A distinta de u , i B un punt sobre t entre u i u' ,

on u i u' són paral·leles. Sigui APB' un triangle semblant al triangle ACB , B' sobre t , on C és el peu de la perpendicular a AP per B . Aleshores B' és un punt comú a t i u' .

Legendre (1752-1833)

Durant un període de quasi trenta anys Adrien Marie Legendre publicà moltes "demostracions" del postulat de les paral·leles en les successives reedicions del seu llibre de text Éléments de Géométrie, el qual tingué una gran influència en l'ensenyament de la geometria durant tot el segle XIX. Fou un dels millors matemàtics del seu temps. A ell són deguts el mètode dels mínims quadrats, el teorema de reciprocitat quadràtica en teoria de nombres, els polinomis que porten el seu nom i molts teoremes de geometria neutral, és a dir, la geometria que s'obté prescindint del postulat de les paral·leles.

Una de les demostracions de Legendre del Postulat V és la següent (fig. 9). Sigui u una recta, P un punt exterior a

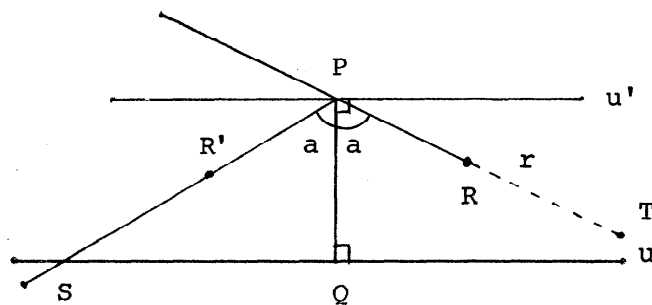


Figura 9

ella. Sigui Q el peu de la perpendicular a u que passa per P i u' la perpendicular a PQ per P . Aleshores u' és paral·lela a u . Sigui r una recta per P distinta de u' . Es tracta de veure que r talla u . Sigui R un punt de r entre u i u' . Prenem R' l'altra banda de PQ tal que $\angle QPR' = \angle QPR$. Ara Q és un punt interior a l'angle $R'PR$ i la recta u passa per Q . Per tant (segons Legendre) u talla al menys un dels costats d'aquest darrer angle. Si talla al costat PR , la recta r talla a u . I si talla el costat PR' , diguem en el punt S , aleshores podem considerar el punt T sobre la semirecta PR tal que $PT = PS$. D'aquesta manera el triangle PQS és semblant al triangle PQT (criteri CAC). En particular l'angle PQT és recte i T és incident amb u' . Per tant r i u' es tallen.

W. Bolyai (1752-1833)

Demuestra el Postulat V a partir de la suposició que per tres punts no aliniats qualssevol hi passa un cercle. La seva

demostració és com segueix. Pren u, P, Q, u' i r com en la demostració de Legendre. Tot seguit considera un punt entre P i Q , diguem A (fig. 10). Sigui B el seu simètric respecte

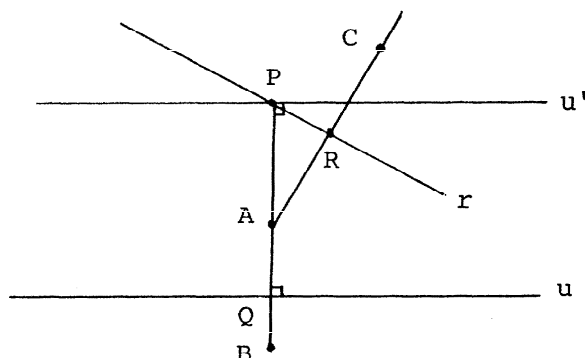


Figura 10

de u i C respecte de r . Posem R per designar la intersecció de AC amb r . Com que A, B i C no són alineats, podem considerar el cercle que passa per ells. El centre d'aquest cercle és incident amb r i amb u , car r i u són mediatrises de sengles cordes del cercle.

Geometria neutral

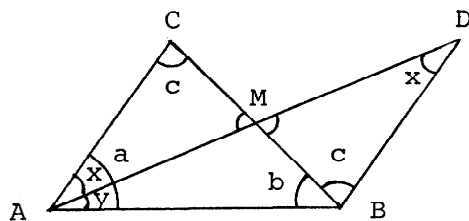
En la secció anterior hem explicat algunes de les demostracions del Postulat V proposades per matemàtics que a priori creien que era possible donar-ne una demostració directa. Com hem dit abans, aquestes demostracions es basen en la suposició d'un enunciat que retrospectivament sabem que és equivalent al Postulat V. En aquesta secció volem parlar d'una manera més subtil d'enfocar

la qüestió per matemàtics que si bé també estaven convençuts que es podia demostrar a partir dels altres, no obstant en les seves recerques no el substitueixen per un enunciat equivalent amagat.

A fi de parlar amb comoditat d'aquestes contribucions, dedicaré aquesta secció a la demostració d'alguns teoremes de geometria neutral, és a dir, la geometria que resulta d'admetre el sistema d'axiomes (implícits o explícits) d'Euclides, llevat el de les paral·leles. Per exemple, podem prendre un sistema d'axiomes semblant al de Hilbert pel pla (vegeu l'exposició d'en Girbau per més detalls). D'aquesta manera, les primeres 28 proposicions dels Elements són neutrals, i en particular la remarcable P.17.

Teorema de Saccheri-Legendre. La suma dels angles d'un triangle és inferior o igual a dos rectes.

Demostració: Donat un triangle ABC (fig. 11), sigui M



$$x + (b+c) + y = (x+y) + b + c = a + b + c$$

Figura 11

el punt mig de BC i sigui D un punt del raig AM tal que M és exterior al triangle i $AM = MD$. Aleshores el triangle AMC és congruent al triangle DMB (criteri CAC). En deduem de seguida que la suma angular del triangle ABD és la mateixa que la del triangle ABC i que almenys un dels angles BAD o VDA és inferior o igual a $1/2$ angle BAC . Per iteració en resulta que existeix un triangle PQR amb la mateixa suma angular que ABC i que té un angle inferior a una constant positiva prefixada. Suposem ara que el triangle ABC tingui una suma angular superior a dos rectes, per exemple dos rectes $+e$, e positiu. Aleshores podem construir un triangle PQR amb un angle inferior a e i de manera que la seva suma angular sigui també dos rectes $+e$. Aleshores el triangle PQR té dos angles la suma dels quals és superior a dos rectes, la qual cosa contradiu P.17.

Teorema (Legrende) . Si existeix un triangle amb defecte nul, aleshores existeix un rectangle. Si existeix un rectangle, aleshores tot triangle té defecte zero. Per tant si existeix un triangle amb defecte nul, aleshores tot triangle té defecte nul.

Demostració: El defecte d'un triangle és la diferència entre dos rectes i la suma angular. El defecte és additiu en un sentit que no cal precisar aquí. Aleshores si existeix un triangle amb defecte zero, la descomposició en dos triangles rectangles ens mostra que existeix un triangle rectangle amb defecte nul (fig. 12). Aleshores es pot construir un rectangle

com en la figura 13. Ara si existeix un rectangle, es pot construir per un procés d'"enrajolament" un rectangle de dimensions arbitràriament grans. Si ara ens donen un triangle arbitrari ,

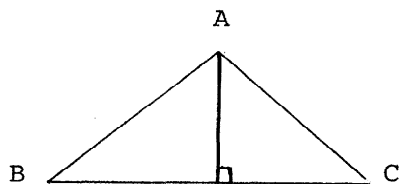
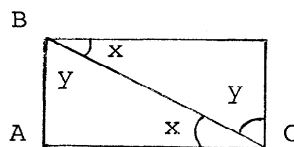


Figura 12



$$x + y = 90^\circ$$

Figura 13

per veure que té defecte nul ens podem limitar a considerar el cas d'un triangle rectangle (per descomposició, com en la figura 12). Sigui doncs PQR un triangle rectangle. Aleshores, si existeix un rectangle, podem construir un rectangle ABCD i punts Q' i R' sobre els costats incidents amb A (fig. 14) tals

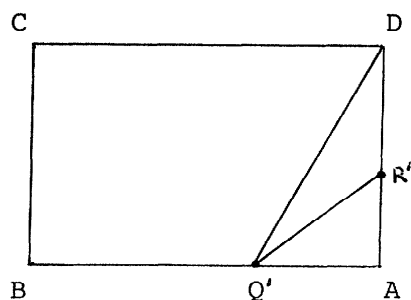
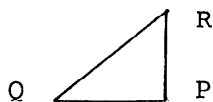


Figura 14

que el triangle AQ'R' sigui congruent amb el triangle PQR .

Del fet que ABCD és un rectangle se'n dedueix de seguida que el triangle ABD té defecte nul; per tant el triangle AQ'D té defecte nul; per tant AQ'R' té defecte nul; per tant el triangle PQR també té defecte nul.

Corol.lari: Si existeix un triangle amb defecte positiu, tot triangle té defecte positiu.

Saccheri (1667-1733)

El cas de Saccheri és remarcable. Filosòficament parteix d'una posició de creure la certesa del Postulat V. Metodològicament, en lloc de voler demostrar directament el Postulat V el que fa és acceptar les proposicions neutrals d'Euclides i començar a desenvolupar-les amb l'esperança que trobarà una proposició contradictòria amb la negació del Postulat V. En aquests desenvolupaments troba nombrosos teoremes genuïnament no euclidians però no arriba mai a la desitjada contradicció. El que ell considera al final una contradicció, amb la que creu "reivindicar Euclides", no són més que resultats no euclidians que l'únic que tenen és que són allunyats de la intuïció euclidiana ordinària.

Tècnicament, Saccheri introdueix el que n'anomenarem quadrilàters de Saccheri (fig. 15), en els que els dos angles de la base

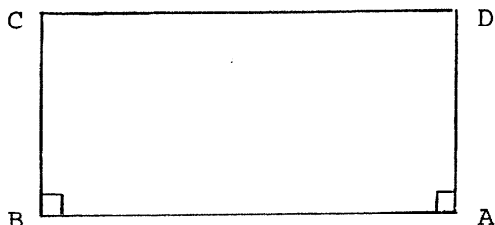


Figura 15

són rectes i els costats verticals iguals. En un tal quadrilàter es verifica que $\hat{C} = \hat{D}$, la qual cosa es demostra sense dificultat en el context de la geometria neutral. Saccheri considera aleshores successivament els tres casos mútuament exclusius

que l'angle $\hat{C}$ sigui superior a una recta (hipòtesi de l'angle obtús, de l'angle recte i de l'angle agut respectivament). La hi

hipòtesi de l'angle obtús la refuta amb el que essencialment és el teorema que n'he anomenat de Saccheri-Legendre en la secció anterior, car aquesta hipòtesi porta immediatament a l'existència d'un triangle amb suma angular superior a dos rectes. En la hipòtesi de l'angle recte, existeix un triangle amb defecte nul i per tant tots els triangles tenen defecte nul, cas que correspon al de la geometria euclidiana.

La hipòtesi de l'angle agut, que Saccheri l'anomena "l'hostil hipòtesi de l'angle agut", només el portava a resultats estranys, mes no contradictoris. Al final la rebutjà en els següents termes:

"La hipòtesi de l'angle agut és totalment falsa, ja que repugna la natura de la línia recta".

Aquesta repugnància prové del fet que la hipòtesi de l'angle agut el porta al següent resultat:

Donat un punt exterior a una recta existeixen dues rectes v i w incidents amb el punt que divideixen el conjunt de rectes que passen pel dit punt en dues classes: la de les rectes que tallen la recta donada i la de les rectes que tenen una única perpendicular comú amb ella.

Aquests resultats els veurem després en parlar de la teoria de les paral·leles de Gauss.

Lambert (1728-1777)

El treball de Lambert s'assembla tècnicament al de Saccheri. Considera quadrilàters trirectangles (en direm quadrilàters de Lambert), com els de la figura 16 i considera les hipòtesis que l'angle D sigui obtús, recte i agut. La primera con -

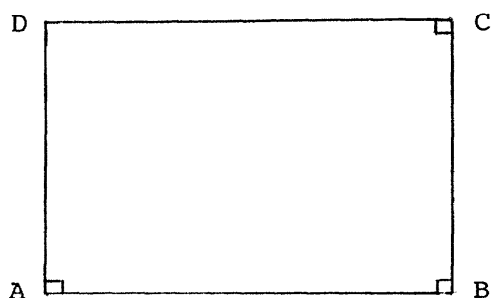


Figura 16

dueix a un triangle amb suma angular superior a dos rectes. En el cas de la segona estem en la geometria euclidiana, car existeix un rectangle. En el cas de la tercera troba també nombroses conseqüències estranyes. Per exemple, observa que posat que el defecte i l'àrea són additius es tindrà que l'àrea de tot triangle és proporcional al seu defecte. Però a diferència de Saccheri, no va interpretar aquests resultats com si fossin absurds, sinó que pensava que

"Tot sistema d'hipòtesis que no porten a contradicció és la base d'una geometria possible".

També va suggerir que la geometria que s'obté en la hipòtesi de

l'angle agut correspon a la geometria sobre una esfera de radi imaginari. Tornarem a parlar d'aquest punt, que sempre sembla una mica misteriós, en parlar de Taurinus.

Lambert també descobreix que en la hipòtesi de l'angle agut existeix una unitat de mesura absoluta. També en parlarem després. Potser és aquest l'únic fet que el fa dubtar de la possibilitat d'una tal geometria.

Klūgel (1739-1812)

Klūgel posà de manifest l'error característic de 28 demostracions del Postulat V. Coneixia l'obra de Saccheri i era conscient que aquest no havia arribat a cap contradicció lògica i expressà dubtes que mai si pogués arribar.

En tots els treballs sobre les paral·leles, la relació precisa entre la formulació lògica de la geometria i els continguts de l'experiència havien restat no analitzats. La solució de Kant qui considerava que la geometria d'Euclides és una forma a priori de la nostre capacitat de aprehendre l'espai, resultà errònia, precisament pel fet que existeixen geometries no euclidianes. Kant certament estava condicionat pels èxits de la mecànica newtoniana, basada en l'esmentada geometria.

Vers 1763 Klūgel arribà a una conclusió important: La cer

tesa amb què s'accepta l'axioma de les paral·leles prové de l'experiència.

Gauss (1755-1855)

Vegeu el que expressà en algunes cartes:

Carta a W.Bolyai (1813)

" Si es pogués demostrar l'existència d'un triangle d'àrea tan gran com volguem, aleshores es podria demostrar amb tot rigor la totalitat de la geometria euclíidiana. Moltes persones prendrien aquesta proposició com un axioma, però jo no! Es possible que l'àrea no arribi mai a un cert valor límit".

Carta a Olbers (1817)

"Cada vegada m'estic convencent més que la necessitat física de la nostre geometria euclídea no pot ésser demostrada, almenys ... per la raó humana. ... hem de posar la geometria, no en el mateix lloc que la aritmètica, que és purament a priori, sinó en el mateix lloc que la mecànica.

Potser en una altra vida ens serà possible de penetrar en la natura de l'espai; per ara no és factible".

Carta a Taurinus (1824)

"Pel que fa al seu intent (de demostrar el Postulat V), no

tinc res (o no gaire) a dir, llevat que és incompleta.
És cert que la seva demostració que la suma dels angles d'un triangle no pot superar dos rectes és una mica deficient pel que fa referència al rigor, però això es pot arreglar fàcilment i no hi ha dubte que aquesta impossibilitat es pot demostrar amb tot rigor. Ara bé, la situació és totalment diferent en la segona part, que la suma dels angles no pot ser inferior a dos rectes; aquest és el punt crític, el penya-segat on es produeixen tots els naufragis. M'imagino que sobre aquest problema no hi ha estat pas molt de temps. Jo hi he estat pensant durant més de trenta anys i no crec que ningú hi hagi pensat, sobre aquesta segona part, més que jo, tot i que no n'he publicat res.

La suposició que la suma dels angles d'un triangle és inferior a dos rectes condueix a una geometria curiosa, molt diferent de la nostra (la euclidiana però totalment consistent, que he desenvolupat a la meua entera satisfacció, de manera que en ella puc resoldre-hi qualsevol problema llevat la determinació d'una constant que no es pot determinar a priori. Quant més gran un pren aquesta constant tan més pròxima és de la geometria euclidiana quan s'agafa infinitament gran, les dues coincideixen. Els teoremes d'aquesta geometria semblen paradoxals i, a un no iniciat, absurds; però una reflexió calmada i sostinguda mostra que no contenen res d'impossible. Per exemple, els angles d'un triangle esdevenen tan petits com es vulgui si

un pren els costats suficientment grans; i tot i així l'àrea d'un triangle no pot superar una certa constant, per més grans que es prenguin els costats.

Tots els meus esforços per descobrir una contradicció, una inconsistència, en aquesta geometria no euclidiana, no han tingut èxit, i la cosa en ella més oposada a les nostres concepcions és que, si fos certa, existiria en l'espai una magnitud lineal, determinada per ella mateixa (però que ens és desconeguda). Però em sembla a mi que, malgrat la sàvia xerrameca dels metafísics, sabem massa poc, o quasi res en absolut, sobre la vertadera natura de l'espai com per considerar impossible del tot el que ens sembla no natural. Si aquesta geometria no euclidiana fos certa i si fos possible de comparar aquella constant amb magnituds que apareixen en les nostres mesures de la terra i del cel, podria ésser determinada a posteriori. En conseqüència, he bromejat de vegades expressant el desig que la geometria euclidiana no fos certa, ja que aleshores tindriem un patró de mesura absolut a priori.

No tinc cap por que les persones que han mostrat tenir una ment matemàtica reflexiva malentenguin el que he dit abans, però en tot cas consideri-ho una comunicació privada de la qual no se n'ha de fer ni ús públic ni cap ús que portés a la publicitat. Potser jo mateix, si en el futur tinc més temps lliure que en la actualitat, faré públi

ques les meves recerques".

Encara al 1829, en una carta a Bessel, Gauss expressa la seva por "al rebombori dels beocis" (o sigui, dels metafísics neokantians).

Carta a Schumacher (1831)

"Fa algunes setmanes que he començat a escriure alguns resultats de les meves meditacions sobre aquest assumpte, que provenen de quaranta anys endarrera, i de les que res n'he redactat, cosa que m'ha obligat tres o quatre vegades a començar de nou el meu treball. No voldria però que això es morís amb mi".

Aquesta redacció la va interrompre el 1832, en conèixer el treball de János Bolyai.

La lectura d'aquestes cartes ens convenç que Gauss té prioritat en el descobriment de la geometria no euclidiana (hiperbòlica), però que no té prioritat de publicació. Essencialment la posició a la qual arriba es pot resumir dient que comprèn que el Postulat V no es pot demostrar a partir dels altres, ni tampoc la seva negació. Per tant és factible desenvolupar una geometria que no satisfaci al Postulat V. Naturalment Gauss era conscient del problema de fonaments que això plantejava, ja que la geometria euclidiana perdia així la base per la qual s'havia considerat consistent sense més arguments, a saber, que era la veritadera geometria de l'espai. Geometria euclidiana o no euclidia

na, les dues restaven iguals davant el problema de la seva consistència.

La concepció de la geometria segons Gauss és la que, a través de Riemann i més tard de Einstein, ha passat a ocupar la posició filosòfica que sempre havia ocupat la geometria euclidiana.

Entre les raons que tal vegada expliquen perquè Gauss no va publicar mai res de les seves recerques podem mencionar el temor que tenia a les polèmiques, el seu principi de "Pauca sed matura", i l'enorme activitat de Gauss en moltes branques de les matemàtiques, de l'astronomia, geodèsia, física, invenció, etc. Tal vegada també hi ha el fet que potser la solució que ell esperava del problema de l'espai, en la direcció que més tard inaugurà Riemann, era la que ell realment perseguia.

En la resta d'aquesta secció exposaré alguns resultats de la teoria de les paral·leles de Gauss i alguns de geometria hiperbòlica. Per abreviar no incloc demostracions, que podeu trobar en el llibre de Coxeter "Fundamentos de Geometria" (Limusa-Wiley, 1971), o en l'exposició d'en Girbau.

Teorema 1. Donada una recta u i un punt fora d'ella A (fig.17)

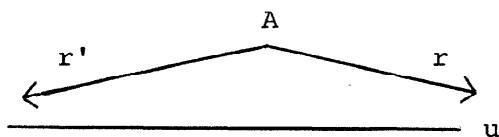


Figura 17

existeixen dos raigs r i r' d'origen A que separen els altres raigs d'origen A amb els compresos entre r i r' , els quals tallen u , i els que no estan compresos entre r i r' , que no tallen a u .

Aquest teorema de geometria neutral és una conseqüència de l'axioma de continuïtat. Si r i r' estiguessin sobre una recta la geometria seria l'euclidiana. A les rectes que contenen r i r' Gauss les anomena paral·leles a u . A les rectes incidents amb A que no tallen u , ultraparal·leles.

Tot seguit Gauss demostra certes propietats formals del paral·lelisme. Per exemple, que si un raig és paral·lel a una recta aleshores el raig que s'obté sumant-li o restant-li un segment també és paral·lel a la mateixa recta. També demostra que el paral·lelisme de raigs és simètric i transitiu.

Posem-nos ara en el cas que r i r' són diferents. Aleshores si una recta u' és paral·lela en els dos sentits a una recta u , aquestes rectes coincideixen. Això permet introduir, per cada sistema de raigs paral·lels, un punt ideal pel qual passen tots els raigs del sistema. Aleshores dos punts ideals determinen una única recta. Podem doncs parlar de triangles assintòtics o sigui, triangles que tenen un vèrtex impropï. A aquests triangles s'els pot aplicar moltes propietats dels triangles ordinaris sempre que considerem que l'angle impropï és nul. Per exemple:

Teorema 2.- (Criteri CAA per triangles assimptòtics). Si ABX i $A'B'X'$ són triangles assimptòtics (X i X' els vèrtexs impropis) tals que $AB = A'B'$ i $a = a'$ (fig. 18), aleshores $b = b'$.

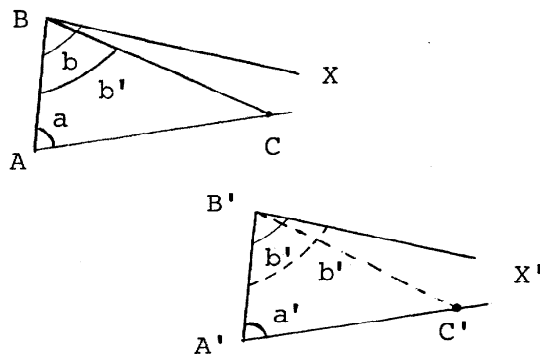


Figura 18

Teorema 3.- Dues rectes ultraparal.leles tenen una perpendicular comú única.

Teorema 4.- En un triangle assimptòtic ABX , l'angle exterior en A , a' , és superior a b (fig. 19)

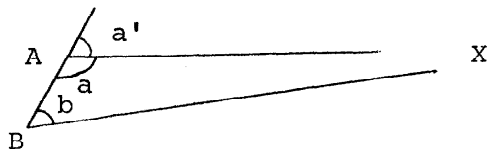


Figura 19

Teorema 5.- (Criteri AAA per triangles assimptòtics). Si ABX i $A'B'X'$ són triangles assimptòtics i $a = a'$, $b = b'$, aleshores $AB = A'B'$ (fig. 20)

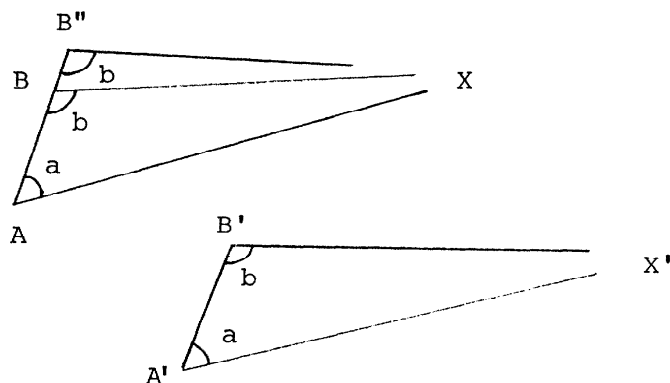


Figura 20

Teorema 6.- Dos raigs que no estan alineats tenen una paral.lela comú única.

Teorema 7.- (Criteri AAA per triangles doblement assimptòtics). Dos triangles doblement assimptòtics són congruents si i només si tenen el mateix angle finit.

Ara és clar que existeixen triangles triplement assimptòtics i que dos d'ells són congruents (per descomposició en dos triangles rectangles doblement assimptòtics).

Teorema 8.- Tot triangle assimptòtic té àrea finita. Per tant, un triangle doblement assimptòtic té àrea finita i aquesta no més depèn de l'angle finit, i un triangle triplement assimptòtic té àrea finita, la mateixa per tot triangle d'aquesta mena.

Teorema 9.- L'àrea d'un triangle és proporcional, per una cons-

tant independent del triangle, al seu defecte. La demostració de Gauss d'aquest darrer resultat es pot esquematitzar així : Per a un triangle doblement asimptòtic el defecte d és l'angle exterior en el vèrtex finit i la seva àrea serà una funció de d , $A(d)$. És una funció creixent de d tal que $A(0) = 0$ i $A(\pi) = k$, on k és l'àrea d'un triangle triplement asimptòtic. Si ara considerem la figura 21 veiem que

$$A(d) + A(\pi - d) = k$$

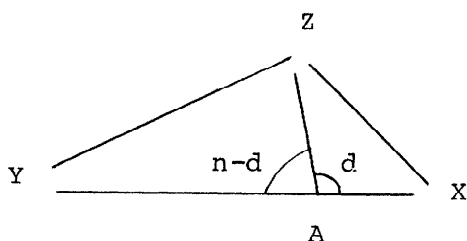


Figura 21

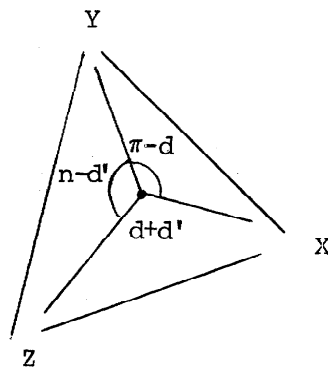


Figura 22

i considerant la figura 22, que

$$A(d) + A(d') + A(\pi - d - d') = k.$$

Si en la primera relació posem $d + d'$ en lloc de d , trobem que

$$A(d + d') = A(d) + A(d')$$

i per tant $A(d) = qd$, q una constant que de fet val k/π , ja que $A(\pi) = k$.

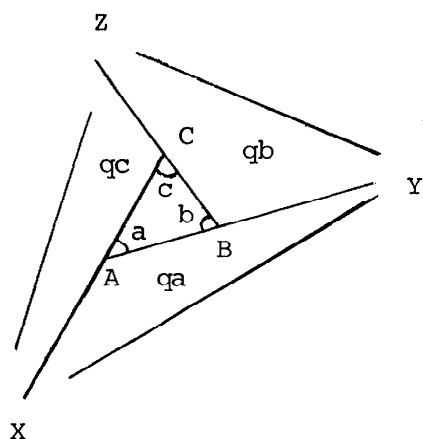


Figura 23

Finalment, considerant la figura 23 veiem que si S és l'àrea del triangle ABC , aleshores

$$S + q(a + b + c) = k = q(\pi)$$

d'on resulta que

$$S = qd \text{ (d el defecte).}$$

Remarca.- D'aquest teorema es pot deduir fàcilment que si dos triangles són semblants, aleshores són congruents. I també que val el criteri AAA per triangles.

Taurinus (1794-1874)

Pels voltants de 1826 Taurinus mostra com es pot construir, per mitjans analítics, un sistema que compleix la hipòtesi de l'angle agut. Aquest sistema no és més que l'esfera de radi imaginari, o sigui, en la qual es redefeixen els angles transformant les fórmules de la trigonometria esfèrica per substitució del radi k per ik . Un suggeriment en aquesta direcció l'havia vista Lambert en observar que en el cas de l'esfera l'àrea d'un triangle és k^2 multiplicat per l'excés angular del triangle, mentre que en la hipòtesi de l'angle agut era proporcional al defecte. La substitució de k per ik transforma la primera fórmula en la segona.

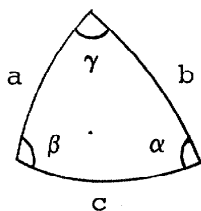


Figura 24

Taurinus parteix de la identitat (fig. 24)

$$\cos(a/k) = \cos(b/k) \cos(c/k) + \sin(b/k) \sin(c/k) \cos(\alpha)$$

vàlida per a un triangle esfèric, i mitjançant el canvi de k per ik

obté la fórmula

$$\text{Ch}(a/k) = \text{Ch}(b/k) \text{Ch}(c/k) - \text{Sh}(b/k) \text{Sh}(c/k) \cos(\alpha)$$

la qual és una manera de dir que es redefeixen els angles α , β , γ dels triangles esfèrics.

Aleshores demostra que d'aquesta manera la suma angular és inferior a dos rectes. Per exemple, si el triangle és equilàter aleshores.

$$\cos(\alpha) = \text{Ch}(a/k) / (1 + \text{Ch}(a/k)) ,$$

que és superior a $1/2$, com es veu immediatament. Així que α és inferior a 60° .

Per altra banda és immediat veure que la fórmula dona la relació del teorema del cosinus en el pla euclidià quan k tendeix a infinit.

Taurinus pren també la segona fórmula fonamental de la trigonometria esfèrica,

$$\cos (\alpha) = -\cos (\beta) \cos (\gamma) + \sin (\beta) \sin (\gamma) \cos (a/k)$$

la qual es converteix en

$$\cos (\alpha) = -\cos (\beta) \cos (\gamma) + \sin (\beta) \sin (\gamma) \operatorname{Ch} (a/k)$$

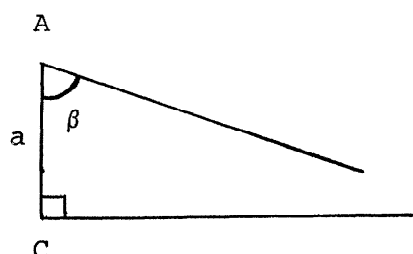


Figura 25

Prenent $\alpha = 0$ i $\gamma = \pi/2$ (fig. 25), obtenim que

$$\operatorname{Ck} (a/k) = 1 / \sin (\beta)$$

que és la famosa fórmula de l'an-
gle del paral·lelisme.

Taurinus també veu que l'àrea d'un triangle és proporcional al defecte angular i calcula la longitud i l'àrea d'un cercle ($2\pi k \operatorname{Sh} (r/k)$ i $2\pi k^2 (\operatorname{Ch} (r/k) - 1)$, respectivament).

NOTES

- (1) CAC' és un abreujament de costat-angle-costat i "criteri CAC" és el criteri de congruència de triangles segons el

qual si dos triangles ABC i $A'B'C'$ són tals que $AB \equiv A'B'$,
 $AC \equiv A'C'$ i $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, aleshores els dos triangles són con
 gruents, això és, $BC \equiv B'C'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ i $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$

(2) El "criteri CCC" diu que dos triangles ABC i $A'B'C'$
 són congruents si $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ i $BC \equiv B'C'$,
 i.e., si els costats d'un són respectivament congruents als cos-
 tats de l'altre.

(3) El "criteri ACA" és el que garanteix que dos triangles
 són congruents si un costat i els seus angles contingus
 d'un d'ells són respectivament congruents a un costat i als seus
 angles contigus de l'altre.

Un significat anàleg té l'abreujament "criteri CAA" en
 el que les premisses són la congruència d'un costat, un angle con
 tigu i l'angle oposat .