

PROBLEMES I JOCS

El problema 16 de Hilbert i els sistemes quadratics

Jaume Llibre

El famós problema 16 de Hilbert consisteix en dues parts. En la segona es demana quin és el nombre màxim de cicles límits que pot tenir el sistema d'equacions diferencials

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \quad (1)$$

on P i Q són polinomis de grau $\leq n$ en les variables x i y (Hilbert, 1900).

Com que els sistemes lineals poden resoldre's utilitzant funcions elementals, el cas no trivial més simple possible és quan P i Q són polinomis relativament primers de grau menor que 3, que no siguin els dos lineals. Aquests sistemes s'anomenen quadratics. L'objecte d'aquesta nota es descriure breument l'estat actual del problema de Hilbert pels sistemes quadràtics.

Una solució $x(t), y(t)$ de (1) es diu periòdica si existeix una constant real $T > 0$ tal que $x(t + T) = x(t)$ i $y(t + T) = y(t)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Les solucions periòdiques de (1) aïllades dintre del conjunt de totes les solucions pe-

riòdiques de (1) s'anomenen cicles límits. Els punts (x_0, y_0) tals que $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ són els punts singulars del sistema (1). Tot sistema quadràtic té com a màxim 4 punts singulars.

A continuació donem els resultats principals sobre els cicles límits dels sistemes quadràtics.

1) A l'interior de tot cicle límit hi ha un únic punt singular (que ha de ser un focus).

2) Dos cicles límits tenen diferent orientació si i sols si els seus interiors no tenen punts comuns (veure la Figura 1).

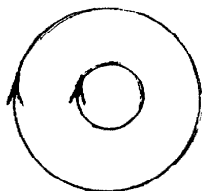


Figure 1.a

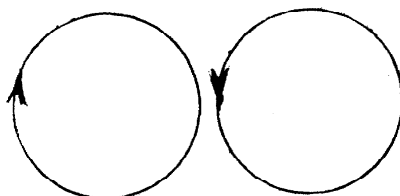


Figure 1.b

En particular, 1) i 2) ens diuen que no poden haver-hi tres cicles límits situats com en les figures 2 i 3, respectivament.

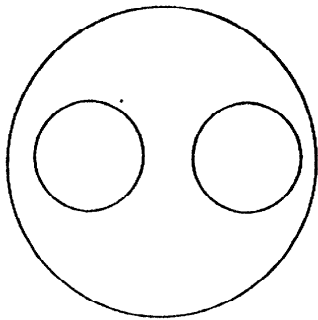


Figure 2.

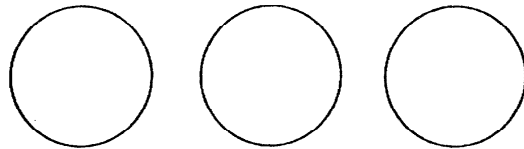


Figure 3.

3) Les configuracions de cicles conegudes pels sistemes quadràtics són les descrites en la Figura 4 i Taula 1.

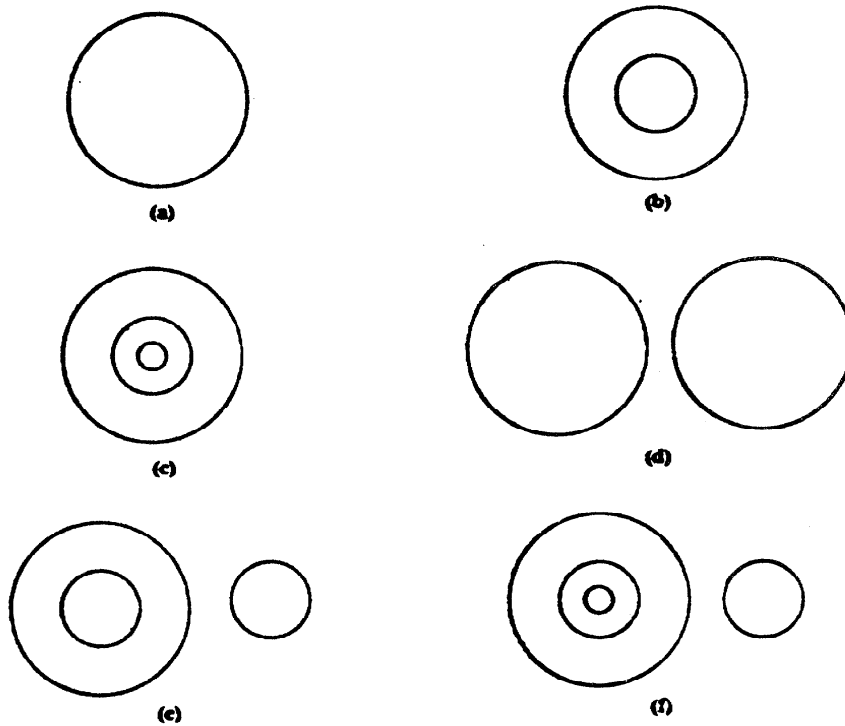


Figura 4.

Exemples amb la configuració	van ser donats per
(a)	Frommer (1934) Yeh Yen-chien (1963)
(b) i (c)	Bautin (1952-54) Chin Yuan-Shun (1959)
(d)	Yeh Yen-chien (1957) Tung Chin-chu (1959)
(e)	Tung Chin-chu (1959)
(f)	Shi Songling (1979) Wang (1979)

Taula 1.

Esta conjecturat que les configuracions donades en la Fi
gura 4 són les úniques possibles pels sistemes quadràtics i que
per tant el nombre màxim de cicles límits és 4. Però, per ara,
ni tan sols s'ha provat que el nombre de cicles límits d'un sis
tema quadràtic sigui finit.