DE COM DUPLICAR EL VOLUM DE L'ALTAR DEL TEMPLE D'APOL·LO I D'AQUESTA MANERA APAIVAGAR LA SEVA IRA

P. Puig

1. APOL.LO IRAT.

Desine fata deum flecti sperare precando.

No esperis poder tórcer els fats del déus amb els teus precs.

(Virgili, Eneida 6, 376)

L'any 430 a.C. el pànic s'apoderarà d'Atenes. Els déus s'havien girat en contra d'aquells que els havien, de fet, inventat: una epidèmia molt forta de febre tifoide assolava la ciutat. Els atenesos decidiren d'acudir a un dels més famosos oracles de l'època, el de Delos, per tal de poder coneixer la raó de llurs mals. Apol.lo els respongué que les seves ires solament minvarien si

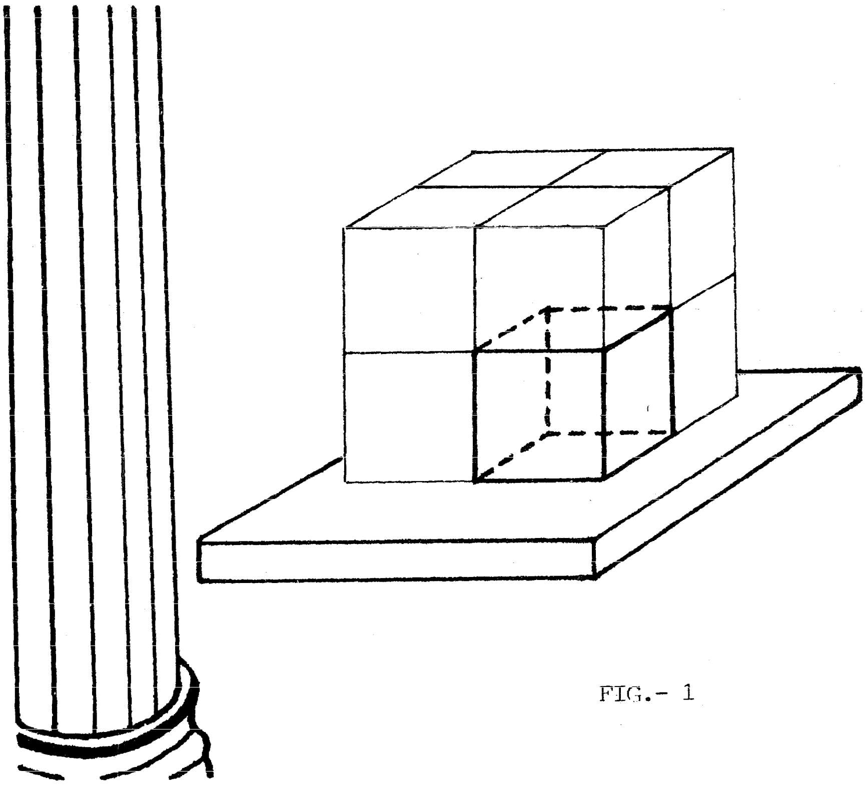

FIG.- 1

substituïen l'altar del seu temple per un altre de la mateixa forma però que tingués doble capacitat. Aleshores ocorregué que l'altar era un cub perfecte i els sol.licitants, poc instruïts, pensaren que si en construïen un de nou l'aresta del qual fes el doble de la del primer tindrien solucionat el problema. D'aquesta manera, però, el resultat fou que aconseguiren octuplicar, i no duplicar, el volum del cub i Apol.lo, indignat, arrasà la ciutat augmentant la virulència de la malaltia.

Aquesta llegenda, narrada per Filoponi i per Eratòstenes en una carta dirigida al rei Ptolomeu, es complementa amb l'error que cometé el poeta tràgic Eurípides, el qual, en l'escena en què Minos, el mític rei de Creta, observa la construcció de la tomba del seu fill Glauc i exclama: És un espai molt petit perquè serveixi com a sepulcre d'un rei, dupliqueu la tomba conservant-ne la forma cúbica, duplicant-ne cada costat".

D'aquesta manera, sia gràcies als déus, sia per la megalomania d'un rei, els vells savis mantingueren ocupat el seu enginy durant uns quants segles en el problema següent: Donat un cub amb un volum determinat, com se'n pot fer un altre el volum del qual faci el doble?".

Qualsevol dels qui estudien en les nostres escoles sap que si un cub té una aresta de longitud l, el volum V serà $V=l^3$. O, per dir-ho d'una altra manera, $l=\sqrt[3]{V}$. Si en lloc de V prenem 2V, tindrem que l'aresta l' del nou cub valdrà $l'=\sqrt[3]{2V}=\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{2}.l$, i el problema es resol senzillament, calculant una arrel cúbica. Ara bé, però, seriem capaços de trobar una arrel cúbica sense fer servir taules ni calculadores?

Els grecs intentaren de construir l'aresta en qüestió emprant únicament regle i compàs, i no ho assoliren. Actualment i gràcies als avenços de les matemàtiques, se sap que això és impossible, tot i que sovintegen els "il.luminats" que pretenen d'haver-ho aconseguit. Malgrat això, analitzarem ara alguns del mètodes, ben interessants, que foren confegits a l'antiga Grècia.

2. UN ATENES ANÒNIM.

> Non paranda nobis solum, sed fruenda etiam sapientia est.
>
> No n'hi ha prou amb adquirir saviesa, cal aplicar-la.
>
> (Ciceró, De Finibus, 1, 1, 3)

Descriurem ara un procediment mecànic, apòcrif a causa de la repugnància que l'élite grega sentia vers els treballs manuals, que data del segle IV a.C. Com a eines s'utilitzen un escaire ordinari i un altre de paleta, la qual cosa accentua més el caràcter purament utilitari i alié al "món de les idees" dels filòsofs. El mètode que cal seguir és el següent:

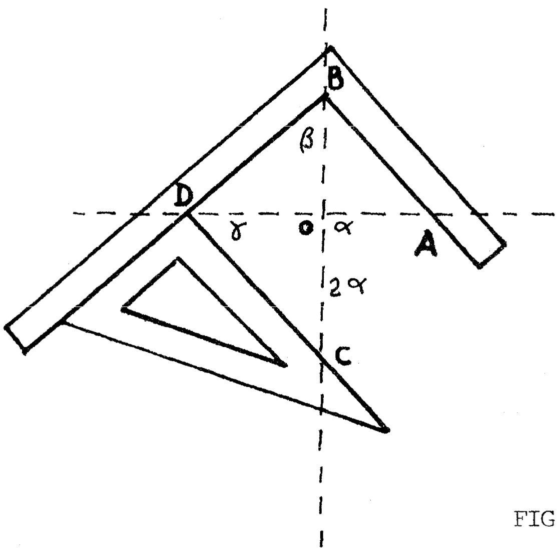

FIG.- 2

Posem per cas que el nostre altar cúbic té una aresta de longitud α i volem saber quant ha de medir la nova aresta, β, per tal que el volum del cub sigui el doble. Fem dues rectes perpendiculars i posem-hi, a partir de llur punt d'intersecció O, dos segments $OA=\alpha$ i $OC=2\alpha$

segons la figura 2.

Ara cal que agafem els dos escaires i els col. loquem de manera que la primera passi per A i el seu vèrtex toqui l'eix principal en un punt que anomenarem B. Cal també que el segon escaire passi per C i a més, que el seu vèrtex toqui l'eix horitzontal en un punt que anomenarem D. La longitud del segment OB així determinat és precisament β, que és el que medeix l'aresta que buscàvem.

Hem vist com, d'una manera senzilla, podem duplicar el volum d'un cub. Tanmateix, però, aquest procediment pot semblar-nos, d'entrada misteriós si no el justifiquem teòricament. Fem-ho:

D'acord amb la figura 2 i per semblança dels triangles rectangles ABO i BDO, tenim que $\alpha/\beta=\beta/\gamma$, ($\gamma$ és la longitud del segment OD). També són semblants els triangles BDO i DCO, de la qual cosa resulta que $\beta/\gamma=\gamma/2\alpha$.

Si reunim les dues igualtats en una sola expressió, ens queda: $\alpha/\beta=\beta/\gamma=\gamma/2\alpha$. De les dues primeres proporcions obtenim que $\beta^2=\alpha\gamma$, i de la primera i la tercera, $\beta=2\alpha^2\gamma$. Si multipliquem l'una per l'altra, s'obté que $\beta^3=2\alpha^3$, d'on deduïm que el volum del cub l'aresta del qual val β és exactament el doble del cub d'aresta α.

Hipòcrates de Quios, mig segle abans que fos inventat aquest mètode, ja esmentà l'equivalència del problema que ens interessa amb el de la inserció de "dues mitjanes en proporció contínua" entre dos segments, un dels quals medeix el doble que l'altre, i és aquest fet que ens fa considerar les mateixes equacions que hem fet servir per demostrar la veracitat del nostre mètode. Aleshores, com és que si posseïen la maquinària teòrica necessària per justificar aquesta manera pràctica de procedir, l'autor mantingué el seu anonimat? Cal tenir present que en aquella època la Ciència no era considerada patrimoni comú i útil per a tota la humanitat, sinó com a joc intel.

lectual útil per combatre l'avorriment de l'<u>élite</u> aristocràtica, la qual, com sempre, menyspreava clarament qualsevol mena de treball manual, "digne d'esclaus".

Així, a més de 2000 anys de distància, aplaudim el nostre anònim amic, qui sap si el primer científic.

3. ELS METODES DE L'ENGINYER.

> Si parva licet componere magnis.
>
> Si ens és llegut de comparar coses petites amb altres de grans.
>
> (Virgili, Geórgiques 4, 176)

Un segle més tard, aproximadament el 287 a.C. sorgí en la història la figura d'Arquimedes. Ell fou, sens dubte, el més gran dels científics grecs i el primer enginyer. Les seves obres no constituïen una simple elucubració filosòfica, sinó que eren fruit d'una observació acurada de la natura o d'una necessitat concreta. En el camp de les matemàtiques realitzà avenços importants en Geometria, fent servir amb gran encert el "mètode d'exhaustió" i s'apropà molt al concepte modern de límit. No se sap si realitzà o no algun descubriment important pel que fa a la duplicació del volum del cub, sí, però, que s'han conservat fórmules d'aproximació al càlcul d'arrels cúbiques, la qual cosa és, de fet, equivalent. Vegem com podem calcular $\sqrt[3]{2}$, o qualsevol altra, mitjançant "aproximacions successives", tot prenent inspiració en els mètodes d'Arquimedes:

α - Busquem un número que, en elevar-lo al cub, ens faci 2.

β - Aquest número haurà de ser més gran que 1 perquè $1^3=1$, i més petit que 2 ja que $2^3=8$.

γ - Imaginem-nos que tenim un valor aproximat de $\sqrt[3]{2}$,l' anomenarem a, i que volem obtenir un resultat encara més aproximat al qual direm b . Podem suposar que $b=a+r$, on r és més gran que -1 i més petit que 1, segons el raonament del l'apartat anterior.

δ - Si elevem a+r al cub, n'obtindrem $(a+r)^3=a^3+3a^2r+3ar^2+r^3$. Deixem de banda els termes en què apareixen r^2 i r^3 perquè són petits (r és menor que 1 en valor absolut) i tindrem $2\approx b^3=(a+r)^3\approx a^3+3a^2r$.

ε - Si prenem com a r el que verifica l'equació $2=a^3+3a^3r$, serà $r=\frac{2-a^3}{3a^2}$. Per tant, $b=a+\frac{2-a^3}{3a^2}=\frac{2a^3+2}{3a^2}$. Si ara que hem obtingut b, aproximació millor a $\sqrt[3]{2}$ que a, volguéssim aconseguir-ne una altra encara millor n' hi hauria prou que situéssim b en el lloc de a i que repetíssim el procés anterior. I així successivament, "ad sufinitum", ens aproparíem al valor de $\sqrt[3]{2}$ tant com volguéssim.

ϕ - Cal justificar que realment b és una aproximació millor a $\sqrt[3]{2}$ que a o, per dir-ho d'una altra manera, $|b^3-2|<|a^3-2|$. Certament, tenim que $b^3=(a+r)^3=2+3ar^2+$ $+r^3=2+\frac{(2-a^3)^2}{3a^3}+\frac{(2-a^3)^3}{27a^6}$, d'on $|b^3-2|=(a^3-2)^2.\frac{1}{3a^3}\left|1+\frac{2-a^3}{9a^3}\right|$, i com a se situa entre 1 i 2 tenim que sempre es verificarà que $|b^3-2|<(a^3-2)^2.\frac{1}{3}.\left|1+\frac{2+8}{9}\right|<(a^3-2)^2$. D'on deduïm que si prenem a entre 1 i 2 realment aquest procés ens mena a una exactitud més gran.

Vegem ara quins resultats obtenim si partim de a=1:

$a=1$; $b=\frac{2.1^3+2}{3.1^2}=1.33333$

$a=1.33333$; $b=\frac{2.(1.33333)^3+2}{3(1.33333)^2}=1.26389$

$a=1.26389$; $b=\frac{2(1.26389)^3+2}{3(1.26389)^2}=1.25993$

$a=1.25993$; $b=\frac{2(1.25993)^3+2}{3(1.25993)^2}=1.25992$

$a=1.25992$; $b=\frac{2(1.25992)^3+2}{3(1.25992)^2}=1.25992$

Per tant, tenint en compte que cada vegada obtenim una més gran aproximació, ja ens podem aturar aquí i assegurar que, amb 5 xifres decimals, $\sqrt[3]{2}=1.25992$.

Ara bé, si el cub del nostre altar fa 1.5 metres d'aresta, només caldrà construir-ne un altre l'aresta del qual sigui de $1.5\times 1.25992=1.88988$ metres, i això servirà per a complaure el capritxós Apol.lo.

Conegueren realment els grecs aquest mètode? En general, tot sembla indicar que sí, tenint en compte els procediments que feien servir, especialment a partir d'Arquimedes, i les referències escrites a "fórmules d'exhaució" per a trobar arrels cúbiques.

A partir d'Arquimedes, la matemàtica grega -i, amb ella, la de tota la humanitat-, experimentà un canvi i s'orientà vers la utilitat i l'observació dels models de la Natura. Això que diem s'evidencia en una carta d'Arquimedes dirigida a Erastòstenes, on parlava de les demostracions en Geometria "... Es més fàcil, certament, determinar la demostració quan prèviament s'ha arribat amb el mètode mecànic a una representació dels problemes que s'examinen, que trobar-la sense aquesta representació prèvia". La història ens mostra com, a vegades, les grans revolucions conceptuals sorgeixen d'una figura, única i genial.

4. UN LEKITOS AL MUSEU D'ALEXANDRIA

Fecundi calices quem non fecere disertum?

Qui no fan eloqüent les copes inspiradores?

(Horaci, Epístoles 1, 5, 19)

Un segle més tard, a la ciutat egípcia de nom Alexandria, capital de les ciències en el món antic per la seva famosa biblioteca, uns curiosos aparells podien ésser admirats al seu Museu. Entre ells hi havia mecànics capaços de dibuixar paràboles, hipèrboles, etc.

També n'hi havia un que servia per a traçar la corba concoïdal, corba inventada per Nicomedes per a resoldre diversos problemes, o el mesolabi de Erastòtenes, especialment dissenyat per a resoldre el problema de la duplicació del cub. D'altres instruments astronòmics posaven en evidència els avanços en aquesta ciència. L'esperit utilitari havia triomfat.

Ara podríem fer una visita -amb la imaginació, es clar- al Museu d'Alexandria per tal de descriure un duplicador del cub que potser alguna vegada fou contemplat pels grecs. D'això, no hi ha referències concretes però és probable que el coneixessin perquè és molt senzill.

Suposem que disposem d'un atuell cònic com el de la figura 3. Una copa de les de còctel també pot servir per al que ens proposem. Hem d'agafar el cub que volem duplicar i obtenir-ne el mateix volum però d'aigua. Això és fàcil si submergim el cub en un recipient completament ple fins dalt de líquid i recollim el que vessa, que serà exactament el del volum del cub segons el famós principi que ja establí Arquimedes. Posem ara aquesta quantitat d'aigua en el nostre "lekitos" i fem un senyal just al nivell on arriba. A la figura l'hem senyalat α, tot seguit hem de posar la mateixa quantitat de líquid, obtinguda tal com hem explicat, a l'atuell, i marquem altra vegada el nivell del líquid (β). Observem que ara el volum d'aigua a l'interior del "lekitos" és el doble que el del cub inicial. Doncs bé, si a és la distància des del peu 0 de l'atuell fins al punt α, mesurada a la mateixa paret, i b és la distància des de 0 fins a β, podem afirmar que la longitud l' de l'aresta buscada és, precisament, $l' = \frac{l.b}{a}$, i l és la del costat del cub inicial.

Aquest mètode pot ser realitzat fàcilment per qualsevol persona mitjançant una copa de vidre cònica i un recipient graduat per a mesurar volum de líquids (per exemple, una proveta), i d'aquesta manera no haurà de fer servir el principi d'Arquimedes. Però vegem per què funciona així.

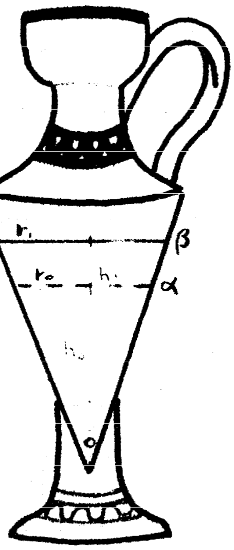

FIG.- 3

Durant el segle IV a.C. ja se sabia que el volum d'un con ve donat per $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$, on R representa el radi de la base i h l'altura. A la figura 3 podem observar que tenim dos cons: un amb altura h_0 i radi r_0

i l'altre amb h_1 d'altura i r_1 de radi. El volum del primer és exactament 1^3, el que busquem, i el del segon $1'^3$, o 21^3. D'altra banda, com els triangles rectangles $O\alpha h_0$ i $O\beta h_1$ són semblants, és cert que $a/h_0=b/h_1$ i $a/r_0=b/r_1$, fet ben conegut des de l'època de Thales. Per tant, tindrem que

$$1'^3 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi \frac{r_0^2 b^2}{a^2}\,\frac{h_0 b}{a} = \frac{1}{3}\pi r_0^2 \frac{b^3}{a^3} = 1^3\frac{b^3}{a^3}\ .$$

D'on es dedueix, si eliminem els cubs, la fórmula esmentada anteriorment.

Actualment són uns altres déus que, a vegades, provoquen els avenços de la ciència. El déu dels diners i la deessa de la guerra orienten milers de científics d'arreu vers nous avenços. Tot i això, però, potser seria bo de tornar a l'antic principi de "conèixer solament pel plaer de fer-ho".

BIBLIOGRAFIA

1.- Breve Historia de las Matemáticas, Egmont Colerus, Vol.I, Ed. Doncel 1972.

2.- Histoire des Mathématiques, Jean-Paul Collette, Vol. I, Ed. du Renouveau Pédagogique, Ottawa 1973.

3.- A Short Account of the History of Mathematics, W.W. Rouse Ball, Dover Pub., New York 1960.

4.- Breve Historia de la Geometría, Francisco Vera, Ed. Losada 1948.

5.- Método de Aproximaciones Sucesivas, N. Ya. Vilenkin Ed. Mir, Moscú 1978.