ALFRED TARSKI I LA LÒGICA CONTEMPORÀNIA. PRIMERA PART.

Josep Pla i Carrera
Universitat de Barcelona.

És del tot impossible donar, en un sol article que preté ésser de divulgació, una relació detallada i completa de les moltes aportacions d'A. Tarski al panorama de la lògica i la fonamentació de les matemàtiques; ho és per dos motius: d'una banda caldria un divulgador més culte en la matèria que no pas el qui, en aquest article-homenatge a tan insigne lògic i matemàtic, escriu i, d'altra banda, en certs temes caldria una preparació en terminologia per part del lector molt més àmplia que no pas la que sol tenir un matemàtic professional, no especialitzat, en lògica i fonaments de les matemàtiques.

Aquests dos fets, però, no poden pas ésser motiu suficient per a renunciar a escriure en el nostre "Butlletí" un article que sigui, en certa forma, l'homenatge humil, però sincer, que la Secció de Matemàtiques de la Filial de Ciències de l'Institut d'Estudis Catalans vol retre a tan il.lustre científic que, després d'una vida de treball"sord, però constant", curulla d'idees, d'innovacions, de resultats, de suggeriments, de conjectures, de deixebles, en una paraula, de ciència en C, ha deixat "la vall del riu vermell". Resten, malgrat tot, la seva obra i la nostra memòria i l'esdevenidor de la lògica matemàtica i, de retruc, de la pròpia matemàtica, el qual sense A. Tarski no seria, ni de bon tros, el que és ni el que serà.

En aquestes pàgines procuraré de recollir i explicar alguns dels seus resultats i ho faré agrupant-los per temes: resultats de lògica de proposicions, de lògica de predicats, de teoria de models, de recursivitat, de teoria de conjunts.

Un camí possible consistiria en enumerar-los simplement i cronològica, però això feria el treball dens i poc atractiu. Per aquesta raó presentarem els resultats, analitzant l'àmbit a on es plantejen, veient quines situacions s'han establert abans que Tarski hi prengui part, què hi diu A. Tarski al respecte i quines són, finalment, les noves situacions que queden aleshores plantejades.

## TARSKI I LA LÒGICA DE PROPOSICIONS.

La qüestió més important de la lògica de proposicions (o sentencial) bivalent és, sense cap mena de dubte, com diuen els *Principia Mathematica* (Whitehead-Russell [1910-1912]):

> "La prova d'un sistema lògic és la seva suficiència i la seva coherència. Això és:
> 1. el sistema ha d'abarcar entre les seves deduccions totes les proposicions que pensem que són veres i aptes per a ésser demostrades a partir solament de les premisses lògiques,...;
> 2. el sistema no ha de portar mai a contradicció ...".

La suficiència i, sobretot, la coherència d'un sistema formal són, també, part important del *Programa Formalista* de Hilbert (Hilbert [1925],[1928]), si bé en un context més ampli del que ara mateix ens ocupa i afegint-hi la qüestió de la decidibilitat. De moment, però, ens limitarem solament a la *lògica de proposicions*.

Els dos problemes dels *Principia* s'anomenen, respectivament, teoremes de *completesa* i de *consistència* i són establerts en 1920 per E. Post (Post [1921]). Aquest eminent lògic americà - que, com el propi A. Tarski, és d'origen polac - estabelix la coincidència dels conceptes *semàntic* i *sintàctic* de *validesa* pel que fa al càlcul proposicional clàssic (numerable) i, de retruc, n'obté la *decidibilitat*.

El camí seguit, explicitat ja completament en els mateixos *Principia*, és el camí *semàntic de les valoracions a* $\mathbb{Z}_2$ i el *sintàctic de les demostracions*.

Si Prop (X) designa l'àlgebra de proposicions sobre X - això és: l'àlgebra lliure sobre X d'operacions $\neg$ (monàdica) i $\vee$ (binària) i $\mathbb{Z}_2 = \langle\{0,1\}, \neg, \vee\rangle$ és l'àlgebra de Boole de dos valors, una *valoració* $v$ és un homomorfisme:

$$v: \text{Prop }(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

(que, com sabem, ve determinat pel coneixament del seu comportament sobre X.)

Una *tautologia* és un element $p \in$ Prop (X) tal que, per tota valoració $v$,

$$v(p) = 1.$$

Un *teorema* és una proposició p que admet una *demostració*. Una demostració de p és una successió

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$$

de proposicions tals que: i) $p_n$ és la proposició p;ii) par cada $1 \leq i \leq n$, $p_i$ és un axioma o bé s'obté per *modus ponens* de $p_j$ i $p_k$ $(j,k < i)$.

(Els axiomes són les proposicions del tipus:

A1. $p \rightarrow p \vee q$; A2. $p \vee p \rightarrow p$; A3. $p \vee q \rightarrow q \vee p$;
A4. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$;

on $p \rightarrow q$ abreuja $\neg p \vee q$. El modus ponens ens diu que $p_j$ és de la forma $p_k \rightarrow p_i$.)

E. Post estableix, en definitiva, entre d'altres, el següent resultat:

> "Per tota $p \in$ Prop (X), p és una tautologia
> sii p és un teorema".

És el teorema de *completesa* (*feble*). De retruc en resulta que no és possible deduir alhora una proposició p i la seva negació $\neg p$. És el teorema de *consistència*. A més hom pot *decidir* si una proposició $p \in$ Prop (X) és o no un teorema mitjançant un *mecanisme finit*. (Són les *taules de veritat*.) És la *decidibilitat* del càlcul proposicional.

Aquesta tècnica, consistent en identificar els teoremes d'una certa lògica proposicional amb aquelles proposicions que prenen *uns certs valors de certesa* en un domini prefixat és la tècnica de les *matrius lògiques* (o de les preàlgebres lògiques) i de les *àlgebres lògiques* i serà utilitzada per Łukasiewcz [1920], [1930]) i per Łukasiewicz-Tarski [1930]. En aquest darrer treball apliquen la tècnica de les matrius lògiques a la lògica bivalent, a la lògica positiva (bivalent sense negació (!)) i a les lògiques polivalents de Łukasiewicz [1920] entre d'altres i constitueix un dels inicis de la lògica *algebraica* (vegeu J. Pla [1977]).

Aquesta tècnica - la de les matrius lògiques i de les àlgebres lògiques - resol la qüestió de la decidibilitat del càlcul proposicional bivalent i pot ésser el camí (en la línia finitista de Hilbert) de resoldre'n d'altres. En A. Tarski [1938] hi llegim:

> "(les definicions de demostració i de teorema) no ens ofereixen cap criteri que ens permeti de decidir, per cada cas particular, si una proposició donada p, és o no demostrable en el càlcul bivalent o en el càlcul intuicionista. El mètode anomenat matricial ens proporciona un criteri en aquesta línia"

i, a més, resol la qüestió de la consistència de les dites teories (ja que tota teoria decidible esdevé consistent de forma finitista o consistent *relativament* a una altra teoria...) En aquest treball A. Tarski refà el teorema de Post i a continuació es qüestiona una solució anàloga pel càlcul proposicional intuicionista - que és un càlcul proposicional construit damunt d'un conjunt X, no buit, i les operacions $\neg$ (monàdica), $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ (binàries) amb un cert conjunt d'axiomes que cal precisar. Ens recorda tot seguit el resultat de K. Gödel [1933] el qual estableix la *no existència de matrius finites* pel que fa al càlcul proposicional intuicionista. (Una certa matriu lògica per aquest càlcul és un conjunt no buit A, dotat d'operacions en correspondència amb les del càlcul i d'un cert subconjunt B d'A que constitueix el conjunt de valors de *validesa semàntica*.) Tarski construeix una matriu com un *límit* de matrius finites, resultat ja establert per Jaśkowski [1936].

A continuació A. Tarski dóna matrius topologiques d'ambdós càlculs i, en el cas bivalent, estableix una condició necessària i suficient sobre l'espai topològic per tal que les matrius ens proporcionin completesa i és que *l'espai sigui isolat;* en el cas intuicionista troba també una condició topològica, que anomena *ésser E-espai*, que dóna *completesa*, però constata que també d'altres espais topològics (no necessàriament E-espais) proporcionen un teorema de completesa intuicionista.

El treball s'acaba, via els resultats de Stone [1937] i Tarski [1937] que lliguen els anells de Boole en el sentit de Stone [1936] ( és a dir, sense unitat ) i la seva família d'ideals amb espais topològics, donant matrius que són àlgebres d'ideals d'anells de Boole de certs tipus especials que defineix a l'ocasió (i que determina segons que els seus ideals generats per un element siguin finits, per tot element, o bé infinits, també per tot element.)

Així A. Tarski estableix que les tautologies dels càlculs de proposicions bivalent i intuicionista són aquelles i solament aquelles que esdevenen vàlides llegides, respectivament, en *totes* les àlgebres de Boole o en totes les àlgebres de Heyting - que ell anomena àlgebres de Brouwer i que són, en realitat, les duals de Heyting .

Aquesta línia de recerca la reprén Tarski amb la col.laboració de McKinsey (McKinsey-Tarski [1944], [1946], [1948]), on aconsegueixen d'establir resultats topològics importants relatius a les lògiques bivalent, intuicionista i modal S4 de Lewis [Lewis-Langford [1932]], relacionant les àlgebres de Boole i les de Heyting: *aquestes són les àlgebres dels oberts de les àlgebres de Boole amb un operador topològic de tipus S4* ; a més, McKinsey [1941] aconsegueix d'establir la *decidibilitat* per a lògiques modals de Lewis dels tipus S2 i S4. Aquests treballs, tots ells en la línia de Stone [1936], [1937b] . Una obra de *sistematització* d'aquestes tècniques és, sens dubte, l'obra de Rasiowa [1974].

En aquest sentit podem pensar el propi càlcul proposicional (Prop (X), $\neg$, $\vee$, Tautologies) com una matriu de la lògica bivalent, gràcies al teorema de completesa (feble) de Post.
A més, com passa amb tota matriu lògica, podem introduir una relació d'equivalència en Prop (X): p, q $\in$ Prop (X),

$p \equiv q$ si, i només si, $p \rightarrow q$ i $q \rightarrow p$ són *tautologies*.

L'àlg ra quocient A=Prop(X)/$\equiv$ esdevé un àlgebra de Boole, anomenada àlgebra de Lindenbaum, ja que aquest eminent lògic polac hi treballà en 1931 quan també s'hi trobava interessat A. Tarski (vegeu Rasiowa-Sikorski [1970], p. 245, nota).

* * *

El teorema de completesa de Post és generalizable en el sentit següent: sigui $\Sigma$ un conjunt de proposicions i p una proposició. Establim les definicions següents:

"p és una *conseqüència semàntica de* $\Sigma$ [$\Sigma \models p$] sii tota valoració $v$ que fa vàlid $\Sigma$ fa vàlid també p";

"p és una *conseqüència sintàctica* de $\Sigma$ [$\Sigma \vdash p$] sii p admet una demostració a partir de $\Sigma$ (i això significa que ara disposem dels esquemes d'axiomes d'abans i del que ens aporta $\Sigma$ )".

El teorema *fort* de completesa és el següent:

$$\Sigma \models p \quad \text{sii} \quad \Sigma \vdash p.$$

(El teorema feble s'obté, en particular, per $\Sigma = \emptyset$.)

En aquest context disposem de dues definicions paral.leles: sigui $\Sigma \subseteq$ Prop (X):

"$\Sigma$ és *consistent* sii no existeix cap p $\in$ Prop (X) tal que $\Sigma \vdash \neg p$ i $\Sigma \vdash p$";

"$\Sigma$ és *satisfactible* sii existeix una valoració $v$ que fa vàlid $\Sigma$ ".

El teorema fort de completesa equival a la igualtat entre ambdós conceptes.

Kàlmar [1934-35] estableix el teorema fort de completesa pel càlcul proposicional bivalent i el nús argumental de la demostració és el resultat que segueix:

> "tot subconjunt consistent $\Sigma \subseteq$ Prop (X) pot ésser submergit en un conjunt consistent $\Delta \subseteq$ Prop (X) *maximal* entre els consistents"

que, segons Łukasiewicz-Tarski [1930], és de Lindenbaum.

(En realitat, el conjunt Shell $v$ = $\{p \in$ Prop (X): $v(p)=1\}$ és un subconjunt consistent maximal i tot subconjunt consistent maximal és Shell $v$ , per una certa valoració $v$.)

El cas general, per X de cardinal arbitrari (no numerable) l'establiria, indirectament, Mal'cev [1936].

Sigui $\Sigma \subseteq$ Prop (X) consistent, la relació d'equivalència

$$p,q \in \text{Prop }(X), \quad p \equiv_{\Sigma} q \quad \text{sii} \quad \Sigma \vdash p \rightarrow q \quad \text{i } \Sigma \vdash q \rightarrow p$$

és una congruència i l'àlgebra quocient A= Prop (X)/$\equiv_{\Sigma}$ és un àlgebra de Boole: l'*àlgebra de Lindenbaum* de Prop (X) relativa a $\Sigma$.

En Tarski [1930] i, posteriorment, en Stone [1936], aprofundint l'estudi de les àlgebres de Boole (per qüestions d'extensions de mesures, el primer, i per establir els teoremes de *representació*, el segon), estableixen:

> "tot filtre d'un àlgebra de Boole es pot submergir en un ultrafiltre".

A la seva tesi de 1947 L. Henkin estableix que el teorema de *compacitat* per a lògiques de primer ordre (en parlarem en un altre article) implica el teorema de l'*ultrafiltre booleà* [Henkin [1947], [1949]] , però serà Tarski qui, trobant-se ja a Berkeley, s'interessarà en les possibles equivalències d'aquest teorema de l'ultrafiltre i certs resultats de metamatemàtica (o lògica) (vegeu G.H. MOORE [1982], p. 29, nota 10). El teorema de compacitat pel càlcul proposicional bivalent, amb X de cardinal arbitrari, l'estableix, però, per primera vegada Mal'cev [1936].

En 1954, L. Henkin [1954a] estableix l'equivalència d'ambdós teoremes: el teorema de Lindenbaum i el teorema de l'ultrafiltre booleà i ho estableix en l'època en que es troba treballant a Berkeley amb D. Scott i A. Tarski. Així s'estableix l'equivalència entre un teorema matemàtic (d'àlgebra): el de l'ultrafiltre booleà, i un teorema metamatemàtic (de càlcul proposicional): la completesa forta.

El teorema de *compacitat semàntica* per a la lògica proposicional diu:

> "$\Sigma \subseteq$ Prop (X) és satisfactible sii tota part finita ho és".

L'any 1954, sota la direcció d'A. Tarski, queden establertes les equivalències següents:

- . Teorema de l'ultrafiltre booleà;
- . Teorema de compacitat semàntica pel càlcul proposicional;
- . Teorema fort de completesa.

A més, els teoremes de completesa feble i de compacitat semàntica equivalen al teorema fort de completesa.

En aquesta època també H. Rubin i D. Scott [1954] estableixen l'equivalència entre el teorema de Tychonoff per a $T_1$-espais i el teorema de l'ultrafiltre booleà. D'aquesta manera el teorema de compacitat semàntica esdevé equivalent a un teorema topològic.

Tot el que hem exposat ens suggereix la qüestió següent: *tota àlgebra de Boole és un àlgebra de Lindenbaum d'una certa àlgebra proposicional?* La resposta és afirmativa:

> "tota àlgebra de Boole A és *isomorfa* a un àlgebra de Lindenbaum Prop $(X)/\equiv_\Sigma$ per a certs X i $\Sigma \subseteq$ Prop (X)".

En particular, l'àlgebra Prop $(X)/\equiv$ , on $\equiv$ és la relació d'equivalència que correspon a $\Sigma = \emptyset$ és un àlgebra de Boole *lliurement* *generada* per $X/\equiv\ = \{[x]: x \in X\}$ que és atòmica quan X és finit (cas sense cap interès lògic) i sense àtoms quan X és infinit (vegeu Loś [1954], [1957] i Sikorski [1960]).

No és, doncs, gens estrany que Tarski estudiï amb profunditat les àlgebres de Boole ( Tarski [1935], [1937a], [1939], [1945], [1949], [1955], Smith-Tarski [1956]). Obté, entre d'altres molts resultats, axiomàtiques alternatives; aprofundeix l'estudi de certs tipus d'àlgebres de Boole com ara les atòmiques i no atòmiques, les completes, les $\alpha$-completes, les m-completes, les $\sigma$-àlgebres i les distributivitats infinites (de certs tipus); estableix lligams entre elles i generalitza els teoremes de representació de Stone a les m-àlgebres, a les $\sigma$-àlgebres, a les àlgebres atòmiques i a les completes; aprofundeix l'estudi de les àlgebres de Boole amb la condició de la m-cadena així com el seu lligam amb possibles tipus de completesa. Ho aplica a teoremes metamatemàtics i a qüestions relatives a extensions de mesures; s'interessa per les àlgebres de Boole amb operadors i les àlgebres de relacions.

* * *

Nosaltes, però, ens preocuparem més d'un altre línia de recerca que A. Tarski enceta en l'anàlisi de la teoria proposicional i que trobem recollida en els seus treballs [1930a], [1930b], [1935-36]. En el primer d'ells llegim:

> "L'objecte d'aquesta comunicació és de precisar el sentit i d'establir les propietats elementals d'alguns conceptes importants de la *metodologia de les ciències deductives*, que s'anomena habitualment, seguint Hilbert, *metamatemàtica*".

La idea consisteix en pensar les teories com conjunts de proposicions i, a partir de certs subconjunts $\Sigma \subseteq \text{Prop}(X)$ i les regles d'inferència, construir el conjunt

$$\text{Ded}\,\Sigma = \{ q \in \text{Prop}(X) : \Sigma \vdash q \}.$$

Així s'obté el *conjunt de totes* les conseqüències sintàctiques de $\Sigma$.

Observa Tarski que el seu operador Ded : $P(\mathrm{Prop}(X)) \to P(\mathrm{Prop}(X))$ compleix les següents propietats:

1. per tot $\Sigma \subseteq \mathrm{Prop}(X)$, $\Sigma \subseteq \mathrm{Ded}(\Sigma)$;
2. per tot $\Sigma \subseteq \mathrm{Prop}(X)$, $\mathrm{Ded}(\mathrm{Ded}(\Sigma)) \subseteq \mathrm{Ded}(\Sigma)$;
3. per tot $\Sigma \subseteq \mathrm{Prop}(X)$, $\mathrm{Ded}(\Sigma) = \bigcup\{\mathrm{Ded}\,\Delta : \Delta \subseteq \Sigma$ i $\Delta$ finit$\}$.

A més, però, l'operador Ded compleix certes relacions amb les connectives $\neg$ i $\to$ ; són els teoremes de *reducció a l'absurd* i de la *deducció* (Aquest darrer es coneix també com el teorema de Tarski-Lindenbaum, per Tarski-lindenbaum [1927], i a vegades com el teorema de Herbrand, per Herbrand [1928], [1930]). Diuen:

4. per tot $\Sigma \cup \{p,q\} \subseteq \mathrm{Prop}(X)$,

   $p \in \mathrm{Ded}(\Sigma \cup \{q\})$ sii $q \to p \in \mathrm{Ded}(\Sigma)$;
5. per tot $p \in \mathrm{Prop}(X)$,
   5a. $\mathrm{Ded}(\{p, \neg p\}) = \mathrm{Prop}(X)$,
   5b. $\mathrm{Ded}(\emptyset) = \mathrm{Ded}(\{p\}) \cap \mathrm{Ded}(\{\neg p\})$.

Però Tarski va més lluny i generalitza el concepte d'operador Ded a conjunts numerables X arbitraris (que pensa com conjunts de proposicions). D'aquesta manera estableix el concepte d' *operador conseqüència en X* com una aplicació

$$C: P(X) \to P(X),$$

tal que

1. per tot $Y \subseteq X$, $Y \subseteq C(Y)$;
2. per tot $Y \subseteq X$, $C(C(Y)) \subseteq C(Y)$;
3. per tot $Y \subseteq X$, $C(Y) = \bigcup\{C(F) : F \subseteq Y$ i $F$ és finit$\}$.

En el primer dels treballs citats, l'operador C està encara molt lligat al càlcul proposicional bivalent: és el Ded d'abans el que hom té a la ment: en canvi, en els treballs [193ob], [1935-36] l'*abstracció* és completa (sobretot en [1930b] ,on el càlcul proposicional no és, quasi, ni citat . En aquests treballs analitza el significat abstracte de *sistema deductiu* (o *tancat per C*), d'*equivalència lògica*, d'*independència*, de *consistència*, d'*axiomatibilitat*, de *completesa* (i *graus de completesa*) i *decidibilitat*. S'obre així una porta molt important pel que fa a la lògica *algèbrica* i el seu estudi - en particular la proposicional, on els resultats són múltiples i magnífics -; però on Tarski inicia una via de recerca importantíssima és quan planteja la qüestió següent:

> "Què cal imposar a una possible operació binària $\rightarrow$ definida en X i a una possible operació monàdica $\neg$ (en X) amb relació a C: $P(X) \longrightarrow P(X)$ per tal que $C(\emptyset)$ contingui *totes* les tautologies convenientment llegides en X" [1930a]

i la resposta ens la dóna el propi Tarski en [1930a] i en [1935-36]: calen el teorema de la deducció (vegeu 4)) i el de reducció a l'absurd (vegeu 5a i 5b).

Aquesta metodologia podem ampliar-la a fi que $C(\emptyset)$ sigui el conjunt de les veritats intuicionistes, models d'S4 o d'S5, de la lògica positiva, etc... Els treballs en aquest sentit són molts i dispersos i, com exemple, podem citar Brown-Suszko [1973], Pla [1975], Rasiowa-Sikorski [1970], Rasiowa [1974], Verdú [1978] entre d'altres.

A més la introducció dels operadors conseqüència permet una presentació elegant dels resultats metamatemàtics abans esmentats. És fàcil de constatar que

$$\mathrm{Con}\ (\Sigma) = \{q \in \mathrm{Prop}\ (X) : \Sigma \models q\}$$

és un operador de conseqüència (en el sentit de Tarski 1930b), si suprimim la *finitarietat*; satisfà també els teoremes de reducció a l'absurd i de la deducció.

El Ded, en canvi, és clarament finitari; el Con $\emptyset$ és clarament decidible, mentre que el Ded $\emptyset$ no ho és pas de forma òbvia.

Els teoremes feble i fort de Post es reescriuen:

$$\mathrm{Con}\ \emptyset = \mathrm{Ded}\ \emptyset \qquad \text{i } \mathrm{Con}\ \Sigma = \mathrm{Ded}\ \Sigma$$

per tot $\Sigma \subseteq \mathrm{Prop}\ (X)$. Així resulta que el Con és finitari i el Ded és decidible.

Amb aquestes precisions Tarskianes, la metamatemàtica proposicional i bivalent és absolutament precisa i clara: és $\langle$Prop (X), Ded, Con$\rangle$.

*　　　　*　　　　*

Pel que fa al càlcul proposicional, els estudis i aportacions d'A. Tarski, tant en el cas bivalent con en l'intuicionista (com en d'altres) el menen a l'anàlisi de les matrius i àlgebres lògiques (de les que les matrius lògiques en són preàlgebres)i, per tant, a l'estudi de les àlgebres de Boole i de Heyting fonamentalment: d'altra banda obren un camí precís per a l'anàlisi de la pròpia teoria com un objecte matemàtic (que hom pot considera submergit en la teoria de conjunts) i això el porta a la consideració dels operadors de conseqüència i als lligams que existeixen entre ells i les connectives del llenguatge i tot aquest cúmul de resultats ens permeten d'estendre el concepte de connectiva: una connectiva és tota operació algèbrica abstracta que manté un cert lligam amb l'operador de conseqüència; el significat lògic de la connectiva vindrà precisament del lligam imposat.

TARSKI I LA LÒGICA DE PRIMER ORDRE.

La lògica de predicats de primer ordre és més complexa. En farem cinc cèntims.

Sigui L un llenguatge de *primer ordre* sense funcionals, però amb igualtat; és a dir:

- un conjunt V de *variables* $V=\{v_k : k<\alpha\}$;
- un conjunt R de *lletres predicatives* $R=\bigcup_{\kappa<\omega} R_k$, on $R_k = \{P_{ki} : i<\gamma_\kappa\}_{k<\omega}$

Cada $P_{ki}$ és una lletra predicativa de $k$ arguments ($\kappa < \omega$) i $P_{20}$ és la igualtat (i la designem usualment per =).

(La no inclusió de lletres funcionals que facin el paper d'operacions no és pas essencial.)

Construim les *fórmules atòmiques*

$$\mathrm{Atm}_L = \{ P_{ki}w_1 \ldots w_k : P_{ki} \in R_k,\ k<\omega \quad , i <\gamma_k,\ w_r \in V\}.$$

Els conjunts $R_k$ poden ésser eventualment buits ( quan $\gamma_\kappa=0$).

Les equacions $v_k=v_\lambda$ són les fórmules $P_{20}v_kv_\lambda$.

A partir d'$\mathrm{Atm}_L$ i amb operacions $\neg$, $\vee$, $\exists v_k$ $(k < \alpha)$ engendrem l'àlgebra lliure $\mathrm{Pred}_L$. Així doncs

$$
\begin{array}{lll}
\alpha\varepsilon\mathrm{Fórm}_L & \text{sii} & \text{i) } \alpha\varepsilon\mathrm{Atm}_L; \\
& & \text{ii) existeix un } \beta\varepsilon\mathrm{Fórm}_L \text{ i } \alpha \text{ és } \neg\beta \text{ ;} \\
& & \text{iii) existeixen } \beta,\ \gamma\varepsilon\mathrm{Fórm}_L \text{ i } \alpha \text{ és } \beta\vee\gamma \text{ ;} \\
& & \text{iv) existeix un } \beta\ \varepsilon\mathrm{Fórm}_l \text{ i } v_k \in V \text{ i} \\
& & \qquad \alpha \text{ és } \exists v_k\beta \ .
\end{array}
$$

Aconseguim d'aquesta manera la següent àlgebra lliure sobre L:

$$\mathrm{Pred}_L = \left\{ \mathrm{Fórm}_L, \neg , \vee , \exists v_k \ , \ v_k=v_\lambda \right\}_{k,\lambda<\alpha} \ .$$

A continuació s'introdueix un concepte adequat de deducció sintàctica, que no precisarem pas aquí, i,gràcies a ell, una relació d'equivalència en $\mathrm{Pred}_L$; donat, doncs, un conjunt consistent de sentències (fórmules sense variables lliures) d'L, definim:

$$\phi,\psi\ \varepsilon\mathrm{Fórm}_L \qquad \phi \equiv_\Sigma \psi \qquad \text{sii} \quad \Sigma\vdash \phi \to \psi \ \wedge\ \psi \to \phi$$

S'obté una congruència i l'àlgebra quocient

$$A_{\Sigma}(L) = \{\text{Fórm}_L/\equiv_{\Sigma}, \neg, \vee, 0, 1, c_\kappa, d_{\kappa\lambda}\},$$

on $1=[v_\kappa = v_\kappa]_\Sigma$, $0=[v_\kappa \neq v_\kappa]_\Sigma$, $d_{\kappa\lambda}=[v_\kappa = v_\lambda]_\Sigma$ $(\kappa, \lambda < \alpha)$, $[\neg\varphi]_\Sigma = \neg[\varphi]_\Sigma$, $[\varphi \vee \psi]_\Sigma = [\varphi]_\Sigma \vee [\psi]_\Sigma$, $c_k([\varphi]_\Sigma) = [\exists v_k \varphi]_\Sigma$

La dificultat ara és de precisar com és l'àlgebra de Lindenbaum que s'aconsegueix per aquest procediment.

És, però, fàcil de constatar la validesa dels següents resultats:

$AC_0$. $(\text{Fórm}_L/\equiv_\Sigma, 0, 1, \neg, \vee)$ és una àlgebra de Boole;
$AC_1$. $\exists v_k (v_k \neq v_k) \equiv_\Sigma v_k \neq v_k$;
$AC_2$. $\vdash \alpha \rightarrow \exists v_k \alpha$;
$AC_3$. $\exists v_k(\alpha \wedge \exists v_k \beta) \equiv_\Sigma \exists v_k \alpha \wedge \exists v_k \beta$;
$AC_4$. $\exists v_k \exists v_\lambda \alpha \equiv_\Sigma \exists v_\lambda \exists v_k \alpha$;
$AC_5$. $v_k = v_k \equiv_\Sigma \alpha \rightarrow \alpha$;
$AC_6$. $\exists v_\mu [v_k = v_\mu \wedge v_\mu = v_\lambda] \equiv_\Sigma v_k = v_\lambda$, $k \neq \lambda$;
$AC_7$. $\exists v_k [v_k = v_\lambda \wedge \alpha] \wedge \exists v_k [v_k = v_\lambda \wedge \neg\alpha] \equiv_\Sigma v_k \neq v_\lambda$, $k \neq \lambda$.

Aquestes són precisament les equacions que caracteritzen les àlgebres de predicats de primer ordre o *àlgebres cilíndriques*. Aquestes àlgebres són introduides definitivament per A. Tarski amb la col.laboració del seu deixeble L. Henkin (Henkin-Tarski [1961]) i desenvolupades posteriorment per L. Henkin, D. Monk i A. Tarski [1971,1980].

Tarski, però, havia reflexionat amb profunditat la naturalesa del càlcul de predicats de primer ordre en treballs anteriors [1952, 1952a] i, posteriorment, en un excel.lent treball [1965] i havia estudiat àlgebres de Boole amb operadors (B.Jónsson-A.Tarski [1951]) i també les àlgebres topològiques (McKinsey-Tarski [1944], [1946]). (Cal indicar, com un fet curiós i important, que una altra alternativa reeixida d'algebraitzar les lògiques de primer ordre ens ve donada de la ma de Halmos 1955 (recollida a Halmos 1962) i ho aconsegueix generalitzant les àlgebres *monàdiques*, les quals no són altre cosa que una ampliació natural de les àlgebres topològiques de McKinsey-Tarski. La línia de Halmos és, però, de caire *clarament infinitari*; no així la presentació cilíndrica de Tarski. Diem, per acabar, que si bé les algebres topològiques constitueixen una algebraització de les lògiques S4 de Lewis, les monàdiques ho constitueixen de les S5 de Lewis (Lewis-Langford [1932]).

Les ālgebres *cilóndriques* són, doncs, el camí seguit per A. Tarski i la seva escola per tal d'algebraitzar el càlcul de predicats de primer ordre.

Un algebra dilíndrica de dimensió $\alpha$, $\alpha \in Ord$, és una estructura

$$\langle A, \neg, \vee, 0, 1, c_k, d_{k\lambda} \rangle_{k,\lambda<\alpha}$$

on $0, 1, d_{k\lambda} (k, \lambda<\alpha)$ són elements d'A i $c_k$, $\neg$ operacions monàdiques en A i $\vee$ una operació binària, en la qual, per cada $x, y \in A$, , compleixen:

$AC_0$. $\langle A, \neg, \vee, 0, 1 \rangle$ és un àlgebra de Boole;
$AC_1$. $c_k 0=0$;
$AC_2$. $x \wedge c_k x=x$;
$AC_3$. $c_k(x \wedge c_k y)=c_k x \wedge c_k y$;
$AC_4$. $c_k c_\lambda x=c_\lambda c_k x$;
$AC_5$. $d_{kk}=1$;
$AC_6$. si $k\neq\lambda$, $d_{k\lambda}=c_\mu(d_{k\mu} \wedge d_{\mu\lambda})$;
$AC_7$. si $k\neq\lambda$, $c_k(d_{k\lambda} \wedge x) \wedge c_k(d_{k\lambda} \wedge \neg x)=0$.

Però les àlgebres cilíndriqes de Lindenbaum dels càlculs de predicats de primer ordre són algebres cilíndriques particulars ja que, en general, el conjunt de variables és *numerable*; això dóna algebres cilíndriques de dimensió $\omega$. Aquest fet, però, no és pas massa important.

El que sí és realment important és el fet següent: una fórmula $\in Form_L$ és *finita en longitud* i, en conseqüència, en ella solament intervenen un núemro finit de variables. Aquest fet comporta que

$$c_k([\varphi]) = [\varphi]$$

pert tot $k<\alpha$ *llevat d'un nombre finit*. L'àlgebra $A_\Sigma(L)$ és, doncs, *localment finita*.

Ara la qüestió ja és calcable de la que teníem en el càlcul proposicional:

Tota àlgebra cilíndrica A de dimensió $\omega$ i localment finita (i.e.: $c_k x=x$ per tot k llevat un nombre finit i per cada x d'A) és l'àlgebra de Lindenbaum $A_\Sigma(L)$ per certs L i $\Sigma$, on $\Sigma$ és un cert subconjunt de sentències de $Pred_L$?

La resposta és afirmativa si bé establir-ho és força més complex que el cas proposicional (vegeu D. Monk [1976]).

Sabem també (Stone [1936]) que les àlgebres de Boole són, en definitiva, àlgebres de conjunts, així com també certes àlgebres de Boole amb operadors (Jónsson-Tarski [1951]).

Podríem plantejar-nos analogament si les algebres cilíndriques són algebres cilíndriques de conjunts. Això ens mena a introduir el concepte d'*algebra cilíndrica de conjunts*. Però no ens bastarà pas aquesta definició, ja que per establir el teorema ens caldrà el concepte semàntic d'*intrepretació* dels càlculs de predicats de primer ordre - concepte molt simple en el càlcul proposicional i força complex en el cas predicatiu, com veurem en un article sobre Tarski i la teoria de models . Aquest concepte d'interpretació semàntica, si bé era usat abans del seu establiment definitiu, seria el propi A. Tarski qui l'establiria en 1936.

Serà també en aquest context on podrem plantejar-nos els teoemes de completesa (fort i feble), de compacitat, etc... i la seva possible equivalència amb l'axioma de l'ultrafiltre booleà i amb l'axioma de l'elecció. Tot això, però, cal ajornar-ho de moment.

Acabarem donant la definició d'àlgebra cilíndrica de conjunts, seguint Henkin-Monk-Tarski (1971):

"Sigui U un conjunt no buit i $\alpha \in Ord$.

Per cada $k < \alpha$ definim

$$c_k : P({}^{\alpha}U) \longrightarrow P({}^{\alpha}U)$$

$$c_k X = \{ x \in {}^{\alpha}U : x \restriction \alpha - \{k\} = y \restriction \alpha - \{k\} \text{ per un } y \in X \}.$$

(Així s'obté el cilindre general desplazant X al llarg de l'eix k-èsim en l' $\alpha$-espai.)

Per cada $k, \lambda < \alpha$, considerem

$$d_{k\lambda} = \{ x \in {}^{\alpha}U : x_k = x_\lambda \}$$

(Són els hiperplans diagonals).

Un àlgebra cilíndrica de conjunts de dimensió $\alpha$ s'obté considerant una família $A \subseteq P({}^{\alpha}U)$ que sigui closa com estructura booleana, ho sigui per les operacions $c_k$ $(k < \alpha)$ i contingui els $d_{k\lambda}$."

Més endavant, en la tercera part d'aquesta aproximació a l'obra d'A. Tarski en l'àmbit de la lògica contemporània, retornarem a les àlgebres cilíndriques de conjunts i clourem la pregunta que, ara per ara, resta oberta.

## BIBLIOGRAFIA CITADA.


BROWN, D.-SUSZKO, R.

1973 'Abstracts logics'. Diss. Math., CII, pp. 9-40.

GÖDEL, K.

1933 'Eine Interpretation des intuitionidtichen Aussangenkalkül'. Erg. Math. Koll. IV, pp. 39-40.

HALMOS, P.R.

1962 *Algebaric Logic*. Chelsea. New York.

HENKIN, L.

1947 'The completeness of Formal Systems'. Princeton.

1949 'The completeness of the first order functional calculus'. Journ. Symb. Logic., 14, pp. 159-166.

1954 'Boolean representation through Propositional Calculus'. Fund. Math., 41, pp. 89-96.

HENKIN, L.-MONK, D.-TARSKI, A.

1971 *Cylindric Algebras I*. North. Holland. Amsterdam.

1980 *Cylindric Set Algebras*. Lect. Notes in Math., 883, Springer-Verlag. Berlín

HENKIN, L.-TARSKI, A.

1961 'Cylindric Algebras' (en *Lattice Theory*). Am. Math. Soc. pp. 83-113. Providence.

HERBRAND, J.

1928 'Sur la théorie de la démonstration' C.R. Sceanc. Acad. Sci. Paris, 186, pp. 1274-1276.

1930 'Recherches sur la théorie de la démonstration'. Tr. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl.III, 33 p.

HILBERT, D.

1925 'Über das Unendliche! Math. Ann., 95, pp. 161-190.

1928 ' Die Grundlagen der Mathematik'. Ab. Math. Sem. Hamburg Univ., 6, pp. 65-85.

JAŚKOWSKI, S.

1936 'Recherche sur le systéme de la logique intuitioniste'. Act. Congr. Inter. Philos. Scient., VI. Paris.

JÓNSSON, B.-TARSKI, A.

1951 'Boolean algebras with operators, I'. Am. J. Math., 73, pp. 891-939.

KALMAR, L.

1934-35 'Über die axiomatisierbarkeit der Aussangenkalküls'. Acta Sc. Math., 7, pp. 222-243.

LEWIS, C.I. - LANGFORD, C.H.

1932 *Symbolic Logic.* New York.

LOŚ, J.

1954 'Sur la thêoreme de Gödel pour les thêories indenombrables' Bull. Acad. Pol. Sc., Cl. III, 2, pp. 319-320.

1957 'Remarkes on Henkin's paper: Boolean Representation through proposicional calculus'. Fund. Math., 44, pp. 82-83.

ŁUKASIEWICZ, J.

1920 'O logice trójwartościowej'. Ruch. fil.,5,pp. 170-171

1930 'Philosophische Bermerkungen zu mehrwertigwn Systemen des Aussagenkalküls'. Compt. Rend. Seanc. Scienc. et Lettr. Varsovie, C.III, 23, pp. 51-77.

ŁUKASIEWICZ,J.-TARSKI, A.

1930 'Untersuchungen uber den Aussangenkalkül'. Compt. Rend. Seanc. Scienc. et Lettr. Varsovie, C.III, 23, pp. 30-50.

MAL'CEV, A.

1936 'Untersuchungen aus den Gebiet der mathematischen Logik'. Mat. Sb.1, pp. 232-236.

McKINSEY, J.C.C.

1941 'A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4 with an application to topology'. J. Symb. Logic., 6, pp. 117-134.

McKINSEY, J.C.C. - TARSKI, A.

1944 ' The algebra of topology'. Ann. Math., 45, pp. 141-1

1946 'On closed elements in clousure algebras'. ibid., 47, pp. 122-162.

1948 'Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting'. J. Symb. Logic, 13, pp. 1-15.

MONK, D.

1976 *Mathematical Logic.* GTM., 37, Springer-Verlag. Berli

MOORE, G.H.

1982 *Zermelo's Axiom of Choice.* Studies in history of Math. and Phis. Sc., 8. Springer-Verlag. Berlin.

PLA, J.

1975 'Contribució a l'estudi de les estructures algebraiques dels sistemes lògics deductius! Univ. de Barcelona.

1977 'Alguns aspectes actuals de la lògica algebraica'. Pub. U.A.B., 12, pp. 21-36.

POST, E.

1921 'Introduction to a general theory af elementary propositions'. Am. J. Math., 43, pp. 163-185.

RASIOWA, H.

1974 *An algebraic Approach to Non-Classical Logics*. Studies in Logic., 18. North-Holland. Amsterdam.

RASIOWA, H.- SIKORSKI, R.

1970 *The Mathematics of the Metamathematics*. Warsaw.

RUBIN, H.- SCOTT, D.

1954 'Some Topological Theorems Equivalents to Boolean Prime Ideal Theorem'. But. Am. Math. Soc., 60, pp. 389.

SIKORSKI, R.

1960 *Boolean Algebras*. Springer-Verlag. Berlin.

SMITH, E.C.-TARSKI, A.

1957 'Higher degrees of distributivity and completeness in Boolean algebras'. Trans. Amer. Math. Soc., 84, pp. 230-257.

STONE, M.H.

1936 'The theory of representations for Boolean algebras'. Trans. Amer. math. Soc., XI, pp. 37-111.

1937 'Applications of the theory of Boolean rings to general topology'. íbid., XII, pp. 375-481.

1937a 'Topological representations of distributive lattices and Brouwerian Logics'. Cas. Pest. Math. a Fys., LXVII, pp. 1-25.

TARSKI, A.

1930 'Une contribution a la théorie de la mesure'. Fund. Math., 15, pp. 42-50.

1930a 'Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik' Compt. Rend. Scenac. Soc. Scienc. Lettr. Varsovie. Cl. III, 23, pp. 22-29.

1930b 'Fundamentale Begriffe der Metodologie der deductiven Wissenschaften' Mon. Math. Fis., vol. 3, pp. 361-404.

1935 'Zur Grundlegung der Booleschen Algebra'. Fund. Math., 24. pp. 177-198.

1935-36 'Grundzüge des Systemenkalkül, I, II'. íbid., 25, pp. 503-526; íbid., 26, pp. 283-301.

1937 'Ideale in den Mengenkörper'. Ann. Soc. Pol. Math., XV, pp. 186-189.

1937a 'Über additive und multiplicative Mengenkörper und Mengenfunktionen'. ompt. Rend. Soc. Scienc. Lettr. Varsovie. Cl III, 30, pp. 151-181.

1938 'Der Aussangenkalkül un die Topologie'. Fund. Math., 31, pp. 103-134.

1938a 'Einige Bermerkungen zur Axiomatik der Boolean Algebra' C.R. Soc. Sci. Lettr. Varsovie. Cl III, 30,pp.33-

1939 'Ideale in vollständigen Mengenkorpen'. Fund. Math., 32, pp. 45-63.

1945 'Ideale in vollständigen Mengenkorpen'. íbid., 33, pp. 51-65.

1949 *Cardinal Algebras*. North Holland. Amsterdam.

1952 'A representation theorem for cylindric algebras' Bull. Am. Math. Soc., 58, pp. 65-66.

1952a 'Some notions and methods on the bordeline of algebra and metamathematics' Int. Congress Math. Cambridge Mass., pp. 705-720.

1955 'Mathematical proofs of some representation theorems for Boolean Algebras'. Bull. Amer Math. Soc., 61, p. 523.

1965 'A simplified formalitzation of predicate logic with identity'. Arch. Math. Log. Grud., 7, pp. 61-79.

TARSKI, A.- LINDENBAUM, J.

1927 'Sur l'indepéndance des notions primitive dans les systèmes mathématiques'. Ann. Soc. Polon. Math. V, pp. 111-113.

VERDÚ, B.

1978 'Contribució a l'estudi de certs tipus de lògiques abstractes'. Univ. de Barcelona.

WHITEHEAD, A.N.-RUSSEL, B.

1910-12 *Principia Mathematica*. Cambridge Univ. Press. London.