

HISTÒRIA DE LA TEORIA DE LA DIMENSIO

per

JOAN TARRES I FREIXENET

(Universitat Complutense . Madrid)

El concepte de dimensió ha sigut un dels grups de problemes que han contribuït al progrés de la Matemàtica en molts dels seus aspectes. De fet, des del punt de vista topològic, la dimensió té una llarga història; de manera resumida, podríem dir que la seva evolució ha estat marcada per les següents qüestions:

1. Donar una bona definició de dimensió i les nocions que s'hi relacionen (línia, corba, superfície, sòlid, etc.)
2. Justificar el nombre de dimensions de l'espai físic.
3. Provar la invariància de la dimensió d'un espai respecte d'algun tipus de transformació.

El primer problema - la definició - té el seu origen a l'antiga Grècia, bé que la teoria de la dimensió és moderna i les seves arrels s'han de buscar segurament a començaments del segle XIX amb Bolzano, qui es va plantejar la qüestió i va proposar algunes solucions certament interessants. Ja al segle XX, Poincaré tornà a incidir en el tema i va donar bones idees per tal d'establir una definició de dimensió i ja finalment Brouwer l'any 1913, Urysohn el 1922 i Menger el 1923 van donar-ne definicions que van impulsar definitivament la teoria. També Lebesgue va fer aportacions en aquest camp i aprofitant propietats enunciatades per ell, Cech va establir l'any 1933 una nova definició de dimensió que, amb les anteriors donen suport a la teoria.

El problema d'explicar el nombre de dimensions de l'espai físic arranca també d'especulacions fetes ja a la Grècia clàssica. Ja a l'època moderna, Kant es va interessar per la qüestió i Poincaré considerava essencial tenir en compte aquest problema a l'hora de donar una definició acceptable de dimensió en el sentit que l'espai físic havia de tenir sempre dimensió tres.

La invariancia de la dimensió respecte de determinats tipus d'aplicacions té el seu origen a l'any 1877 quan Cantor descobreix que figures geomètriques considerades de dimensions diferents poden tenir llurs punts en correspondència bijectiva. Tenint en compte aquest fet, Dedekind formula el problema de demostrar que per a determinades funcions contínues la dimensió no varia. L'any 1890, Peano publica el primer exemple d'aplicació contínua entre un segment de línia i un quadrat complet; això cridava l'atenció una vegada més sobre les paradoxes aparents - que produïa el concepte intuitiu de dimensió. No va ser fins - el 1910 que Brouwer primer i Lebesgue després donaven una demostració de la invariancia i deixava el problema acabat.

LA DIMENSÍO A L' ANTIGA GRÈCIA

En realitat, els grecs no van establir una teoria detallada de la dimensió, però llurs estudis sobre certs conceptes - tocaven aquest tema i van donar lloc a teories informals que han influït sens dubte en matemàtics d'èpoques posteriors, inclosos alguns del segle XX.

Així, Aristòtil escriu a "Metaphisica":

"... el punt és el límit o extrem d'una línia; la línia ho és d'una superfície, i la superfície, d'un sòlid ..."

Veiem que hi ha una progressió des del punt a les demés figures geomètriques i d'acord amb aquestes idees sembla clar que per a ell el concepte clau és el de límit o frontera:

"Si suposem que les línies són principis, són substàncies clarament indivisibles, però són seccions o fronteres de superfícies, com els punts ho són de les línies..."

És a dir, els diferents objectes geomètrics poden ser seccions o fronteres dels immediatament superiors en ordre jeràrquic.

També, als "Elements" d'Euclides hi trobem les definicions següents que fan referencia als objectes geomètrics bàsics:

Llibre I

1. Un punt és allò que no pot partir-se.
2. Una línia només té llargada.
3. Els extrems d'una línia són punts.
4. Una superfície té exclusivament llargada i amplada.
5. La frontera d'una superfície està formada per línies.

Llibre XI

1. Un sòlid és allò que té llargada, amplada i alçada.
2. La frontera d'un sòlid és una superfície.

Aquestes definicions suggereixen dues "teories" rudimentàries de la dimensió:

La primera ve donada per les definicions I.1, I.2, I.4 i XI.1. Dóna una relació directa entre les figures geomètriques i la dimensió i així podem dir que els punts no tenen dimensió, les línies en tenen una; les superfícies, dues, i els sòlids, tres, si tenim en compte les seves característiques de la definició.

La segona teoria la podem establir en base a les definicions I.3, I.5 i XI.2. Aquesta, destaca el caràcter inductiu de la dimensió, doncs ara podem prendre cada element com a extrem de figures de dimensió superior.

Ja en el segle XVII, Newton escriu al seu "Tractatus de Quadratura Curvarum":

"... Les línies es descriuen, i en descriure's són generades, no per superposició de parts, sino per un flux continu de punts. Les superfícies són generades pel moviment de línies i els sòlids pel moviment de superfícies..."

Podem observar com també aquí es posa en evidència que la dimensió té un caràcter clarament inductiu. No obstant, Newton dóna un altre punt de vista a la gènesi de les figures: la progressió del punt al sòlid té lloc a partir d'una idea de moviment, contraposada a les teories estàtiques basades en la noció d'extrem o frontera.

Ambdues teories es poden trobar a la "Encyclopédie" de Diderot i D'Alembert dels anys 1784 al 1789. A l'article dedicat al punt s'hi pot llegir:

"Només existeixen els sòlids tridimensionals; els punts, les línies i les superfícies existeixen per abstracció i són els extrems de les figures respectives, una unitat superior en dimensió".

I també:

"Si hom imagina que el punt es mou, dibuixarà una línia; i una línia que es desplaça, generaria una superfície, etc. Sembla ser que aquest tipus de generació de les dimensions o les propietats dels cossos és la base principal de la geometria moderna..."

Tan per llur importància en si com per la influència que tingueren sobre Bolzano trobem també al segle XVIII diversos autors que s'interessaren pel problema de la definició dels conceptes geomètrics fonamentals així com també del de continu:

A. G. Baumgarten (1714-1762) va escriure un llibre -"Metaphisica" - en el qual hi trobem en certa manera les idees de Newton sobre la generació de les figures, ja que, si bé implícitament, es fa servir el moviment de punts per a definir les línies, superfícies i sòlids:

"Una sèrie de punts amb punts intermigs que dona lloc a una línia és un continu. Igualment, una superfície és una sèrie continua de línies, i un sòlid, una sèrie de superfícies".

Una obra que va tenir molt ressó a la segona meitat del segle XVIII, amb sis edicions entre 1758 i 1800, fou el llibre: "Anfausgründe der Aritmetik, Geometrie, ebenen und sphärische Trigonometrie und Perspectiv" d'A.G. Knäster (1719-1800) on s'hi dona aquesta definició de continu:

"Una quantitat continua (Continu) és quelcom amb les seves parts connectades de manera que quan hom es para, immediatament en comencen de noves i entre un extrem i l'altre no hi ha cap part que no pertanyi a aquesta quantitat".

Per Knäster, una extensió geomètrica és un espai amb una quantitat continua de punts que l'omplen i sobre aquesta base defineix el punt com a frontera d'una línia; la línia, com a frontera d'una superfície, i la superfície com a frontera d'un sòlid.

En aquesta mateixa línia de definició dels objectes geomètrics a partir del concepte d'extrem o frontera tenim també els matemàtics J. Schultz (1739-1805) i K.C. Langsdorff (1757-1834).

Veiem doncs com al final del segle XVIII la qüestió de la definició dels cossos geomètrics i llurs dimensions ocupa bona part del pensament de matemàtics importants d'aquell moment.

LES INVESTIGACIONS GEOMÈTRIQUES DE B. BOLZANO

Si bé Bolzano és conegut pels seus treballs a l'àrea de

l'Anàlisi, val a dir que la geometria va ocupar també la seva atenció durant algunes etapes de la seva vida, sobretot als primers i darrers anys.

Bernard Bolzano va viure entre els anys 1781 i 1848, pel que podem dir que rebé les influències culturals del segle XVIII al mateix temps que participà dels corrents d'innovació de començaments del segle XIX.

Els corrents filosòfics de la època marcaren decisivament la formació de Bolzano, que presentava, juntament amb una gran base matemàtica una excel·lent formació filosòfica i teològica, que feien que considerés de les Matemàtiques allò que tenen d'especulatiu. Es per aixó que no ens ha de semblar estranya la seva obsessió pel rigor a l'hora d'establir noves definicions o bé de donar demostracions dels resultats obtinguts.

Pel que fa a les seves investigacions geomètriques, Bolzano pren com a qüestió essencial donar definicions rigoroses de línia, superfície i sòlid, i més generalment, establir el concepte de continu. Aquestes idees porten Bolzano a trencar els límits tradicionals de la geometria i formular una teoria que, com podrem veure, està fortament relacionada amb la teoria moderna de la dimensió, d'una banda, i de l'altra amb el desenvolupament de la topologia.

L'any 1804, publica un primer treball sobre qüestions geomètriques: "Betrachtungen über Einige Gegenstände der Elementar geometrie". Estableix definicions de línia, superfície i sòlid prescindint de qualsevol idea de moviment i busca la manera d'enunciar aquestes nocions cercant propietats intrínseques de les figures que vol descriure.

En aquest ordre d'idees, comença donant el concepte de distància. Les definicions de Bolzano no són pas un model de claretat, i aquesta de distància no n'és pas una excepció; no obstant,

la idea intuitiva és la habitual, però donar-ne una definició sense fer ús de les coordenades fa que el resultat sigui confós i gens entenedor. Aquesta n'és la traducció textual:

"Alló que va associat a un punt b en relació al punt a de manera que és independent del punt concret a (el qual és precisament aquest i no un altre) rep el nom de distància del punt b presa des del punt a ".

Tretze anys més tard, el 1817, Bolzano publica un treball important sobre les seves investigacions en el domini de la geometria: "Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung...". Aquí, l'autor considera que una figura geomètrica és un conjunt de punts, amb la qual cosa es dona una base conjuntista a la geometria. Però aquestes figures no són "exclusivament" conjunts de punts, sino que aquests conjunts tenen una estructura interna que ben bé pot considerar-se topològica, ja que hom pot comprovar que hi són presents les nocions de distància, entorn esfèric, base d'entorns d'un punt, frontera d'un conjunt, etc. Aquesta és la definició que es dona de línia:

"Un objecte situat a l'espai amb la propietat que un punt arbitrari té exactament un nombre finit de punts veïns corresponents a cada distància més petita que una distància donada és una línia".

S'enten que "veï" d'un punt respecte d'una distància donada és un punt de la intersecció de l'objecte amb la superfície d'una esfera de centre el punt i radi la distància considerada.

De la mateixa manera, les definicions de superfície i de sòlid queden així:

"Un objecte situat a l'espai amb la propietat que un punt arbitrari d'ell té exactament un nombre finit de línies separades completes corresponents a cada distància inferior que una

distància donada és una superfície".

"Un objecte situat a l'espai amb la propietat que qualsevol dels seus punts té almenys una superfície corresponent a cada distància més petita que una distància donada és un sòlid".

Malgrat la extraordinària precisió d'aquestes definicions encara no són prou generals, doncs per exemple si considerem la figura representada en la figura 1:

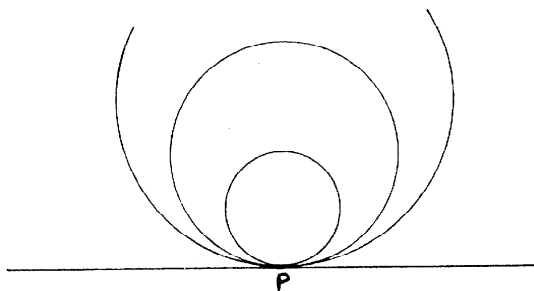


Fig. 1

formada per una línia recta i un conjunt infinit de circumferències tangents a un mateix punt P, i radi $r_n = 2^{-n}$ on n és un nombre natural. Es prou clar que amb els conceptes actuals la figura és una línia, mentre que no ho és en el sentit de Bolzano ja que per a qualsevol distància $d < 1$, el punt P té infinits punts veïns.

D'altra banda, els objectes geomètrics cal que tinguin dimensió 1, 2 ó 3 de manera homogènia, i així hom no pot classificar tampoc el conjunt de la figura 2

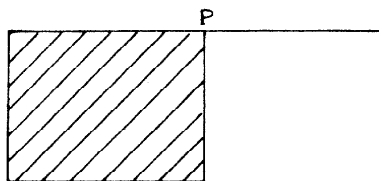


Fig. 2

doncs el punt P té com a veïns un conjunt de punts que no formen una línia.

De tota manera, Bolzano havia copsat l'essència "topològica" de les figures al mateix temps que en destacava el caràcter inductiu de llur dimensió. També en aquest mateix treball es considera un nou tipus de punts respecte d'un objecte geomètric, com ho són els punts aïllats:

"Si un punt i d'un objecte situat a l'espai té la propietat de que per a qualsevol distància d existeix una distància $d' < d$ tal que el punt i no té veïns relatius a la distància d' diem que i és un punt aïllat de l'objecte considerat".

Fent ús d'aquesta definició, Bolzano dona el concepte de continu o extensió continua d'acord amb el criteri que un conjunt és un continu si no té punts aïllats.

Val a dir que el concepte modern de punt aïllat no coincideix amb el que dona Bolzano com és prou evident llegint les definicions. Amb tot, el concepte de punt aïllat de Bolzano està relacionat amb el de conjunt de dimensió zero en un punt en el sentit de Urysohn i Menger, ja que si un punt és aïllat en un conjunt C , la dimensió en aquest punt del conjunt C és zero.

Ara bé, aquests conceptes no són pas equivalents, doncs si hom considera el conjunt C de tots els punts racionals de l'interval $[-1, 0]$ i els irracionals de $(0, 1)$, el punt $i = 0$ no és pas aïllat segons la definició de Bolzano, mentre que la dimensió de C en aquest punt és zero.

A "Paradoxien des Unendlichen" (1851), treball pòstum de Bolzano hi ha descrit un exemple de continu tal com ell l'entenia i on queda clar que no coincideix en absolut amb la definició de Cantor de continu connexe:

"Considerem un segment de recta az . Sigui b el punt mig entre a i z ; c , el punt mig entre b i z ; d , el punt

mig entre c i z , i així successivament. Si prenem el conjunt format pels punts del segment az excepte els punts migs indcats, el punt z és aïllat i el conjunt, per tant, no és un continu. Si hom suprimeix el punt z cap punt del conjunt és aïllat i per tant és una extensió continua".

Els anys 1843 i 1844, Bolzano va publicar encara dos treballs més relatius a qüestions geomètriques: "Über Haltung" i "Geometrische Begriffe", en els quals reafirma totes les idees del treball de l'any 1817 i adopta d'una manera definitiva el mètode que podriem dir-ne "topològic".

Veiem doncs com Bernard Bolzano dedicà tant al començament com al final de la seva obra bona part de la seva atenció a qüestions geomètriques i va posar les bases que van permetre anys més tard iniciar la teoria de la dimensió i inclús l'establiment de la topologia.

ESPAIS DE DIMENSIÓ SUPERIOR A TRES =====

A pesar que publicà molt poques coses al respecte, fou C.F. Gauss (1777-1855) el primer matemàtic d'importància que estudià la geometria dels hiperespais i pot considerar-se com el pont a través del qual els espais de dimensió més gran que tres van arribar al seu esplendor durant la segona meitat del segle passat.

Per a Gauss, l'espai era una abstracció i, per tant la geometria no s'havia de limitar a l'espai físic tridimensional. Per a ell, la geometria es presenta fora de l'espai físic i així, hom pot raonar sobre figures, però a l'anàlisi final, s'han de suprimir i cal presentar teories geomètriques abstractes.

La referència principal que tenim de l'estudi per part de Gauss de varietats de dimensió 1 , dos i en general, n és el treball de l'any 1831: "Theoria Residuorum Biquadratorum" on s'hi

descriu la representació usual dels nombres complexos al pla i s'in-
dica que aquesta representació necessita una justificació a través
d'un model geomètric; així, els nombres complexos formen una varietat
de dimensió dos. Al final del treball, Gauss parla de varietats
de més de dues dimensions pero no entra en la seva discussió.

Al treball "Über die Methode der Kleinsten Quadrate" de
1851 es considera de manera explícita varietats n -dimensionals i
es justifica la seva introducció pel fet de ser el vehicle natural
per dur a terme les investigacions en el mètode dels mínims qua-
drats. Aquestes varietats donen lloc a una geometria analítica ge-
neralitzada basada en n coordenades i la distància euclidiana ha-
bitual.

Entre els anys 1840 i 1860 es publiquen molts treballs
sobre els hiperespais i podem dir que és a partir d'aquests anys
que podem considerar la geometria multidimensional ja completament
encaixada dins l'edifici matemàtic. Són nombrosos els autors que
s'ocuparen d'aquestes qüestions. Entre tots, cal destacar especial-
ment H. Grassmann (1809-1877) i B. Riemann (1826-1866) per l'actitud
filosòfica que van adoptar respecte la nova geometria.

L'any 1844, H. Grassmann publica "Die Lineale Ausdehnungs-
lehre" on s'hi defineix la teoria de la extensió i és el propi autor
qui diu:

"La meua teoria de la extensió és la base de la teoria de
l'espai (geometria); és a dir, és una ciència matemàtica pura inde-
pendent de tota intuïció de l'espai; la seva aplicació principal és
la geometria".

"Així, els teoremes de la geometria tendeixen sempre a la
generalització, pero degut a la limitació a tres dimensions, aque-
sta generalització és impossible; això és pot fer a la teoria de la
extensió".

La definició donada dels espais abstractes està basada en l'antiga teoria del flux o moviment en la generació de les figures:

Una extensió de primer order és el conjunt d'elements formats per un element generador que passa per un canvi continu. El conjunt de tots els elements col·locats al llarg d'una dimensió és un sistema de primer ordre. Per a formar sistemes d'ordre superior hom introdueix dos canvis en un element:

Primer, amb un canvi es produeix una forma de primer ordre a partir de l'element i en segon lloc, hom forma un successió de sistemes paral·lels. El conjunt així constituït és un sistema d'ordre dos. Mitjançant tipus de canvis addicionals podem obtenir sistemes de tercer, quart i en general de qualsevol ordre finit.

B. Riemann tracta la qüestió dels hiperespais especialment a "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (1854). Aquí, a l'hora d'estudiar les varietats topològiques generals es tenen en compte dos aspectes fonamentals: D'una banda, s'a^analitza un mètode de construcció i de l'altre, un procediment a fi de poder determinar punts de la varietat a través de coordenades.

El mètode de construcció de Riemann és més complex que l'antiga teoria del flux però té també un caràcter clarament inductiu, començant amb varietats d'una dimensió a partir de les quals hom pot construir varietats de dimensió arbitrària. El procés permet reduir la posició d'un punt a una varietat n -dimensional per mitjà del càlcul d'un número i una $(n-1)$ -varietat; així un punt queda determinat per n coordenades reals.

Sens dubte, la teoria dels hiperespais i varietats de dimensió n feren més comprensible el concepte de dimensió. Fins l'any 1877, i d'una manera implícita, hom reconeixia que la idea intuitiva de dimensió d'un espai era, precisament, el nombre de

coordenades independents necessàries per a determinar un qualsevol dels seus punts.

EL DESCOBRIMENT DE G. CANTOR. INVARIANCIA DE LA DIMENSIÓ

El 5 de gener del 1874, G. Cantor escrivia a R. Dedekind la següent qüestió: "Es possible posar en correspondència bijectiva els punts d'una superfície i els d'una línia?" . La pregunta de Cantor va considerar-se poc menys que absurda pel fet que semblava evident que dues variables independents poguessin reduir-se a una. No obstant, Cantor deia que, malgrat tot, era necessària una demostració del fet de que la seva pregunta tenia resposta negativa.

Amb gran sorpresa, el 20 de juny del 1877, el propi Cantor creu haver trobat una solució - afirmativa! - del problema i escriu Dedekind amb una pretesa demostració de l'existència d'una bijecció entre el p-cub I^n i el segment $I = [0,1]$. L'argument de Cantor no era correcte; comença un intercanvi epistolar intens entre ell i Dedekind amb les correccions d'aquest i noves propostes del primer. El 29 de juny, Cantor trova la prova definitiva que recull en el treball: "Ein Beitrag zur Mannigfaltkeitslehre" , publicat al Journal de Crelle l'any 1878.

Els trets essencials de la demostració són aquests: Aprofitant que un nombre irracional del segment I té una representació única com a fracció continua infinita:

$$e = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \dots}}}}$$

podem representar $e = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ on els a_i són nombres naturals diferents de zero, queda clar que donats p nombres

irracionals de I :

$$e_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots)$$

$$e_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots)$$

.....

$$e_p = (a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pn}, \dots)$$

determinem un altre nombre irracional:

$$d = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$$

$$\text{on } b_{(n-1)p+1} = a_{1n} ; b_{(n-1)p+s} = a_{sn} ; b_{np} = a_{pn} .$$

Ara, tot quedarà provat amb el següent:

Teorema.— Hi ha una bijecció entre el conjunt de tots els nombres irracionals de I i tot el segment I .

Demostració.— Siguin r_n el terme general dels nombres racionals de I i $t_n = \sqrt{2} / 2^n$. Si h representa qualsevol valor de I excepte els representats per r_n i t_n tenim:

$$I = \{ h ; r_n ; t_n \}$$

$$I \cap (R - Q) = \{ h ; t_n \}$$

i la bijecció queda determinada així:

$$h \longrightarrow h \qquad t_n \longrightarrow t_{2n-1} \qquad r_n \longrightarrow t_{2n}$$

Cantor treu immediatament conseqüències del seu descobriment en considerar que no pot prendre's com a dimensió d'un espai el nombre de coordenades independents que hom necessita per determinar els seus punts. En opinió de Cantor cal donar un altre concepte de dimensió.

Dedekind donà per bona la demostració de Cantor, però seguí mantenint que el nombre de dimensions d'una varietat era, malgrat tot, el seu primer i principal invariant, entenent com a dimensió el concepte coordinat. Es per això que Dedekind conjectura com a cert aquest teorema d'invariància de la dimensió:

Teorema.— Si existeix una correspondència bijectiva entre els punts d'una varietat A de a dimensions sobre una varietat B de b dimensions amb $a \neq b$, la correspondència és discontinua.

Dedekind no va aconseguir demostrar el teorema i durant molts anys força matemàtics van intentar provar-lo. Hem de destacar els treballs de J. Lüroth, J. Thomae, E. Jürgens, E. Netto i el propi G. Cantor. Cap en va donar una demostració satisfactòria, si bé una demostració de Cantor de l'any 1879 es considerarà correcta fins l'any 1899 (vint anys més tard!) E. Jürgens provà que era igualment incorrecte. Ja en aquest segle hi ha alguns intents de Baire, Schoenflies i altres per provar el teorema de la invariància, però cap va donar-ne una demostració completa.

La primera demostració del fet que dos espais euclidians E_n i E_m de dimensions n i m respectivament són homeomorfs si i només si $n = m$ la donà L.J. Brouwer en l'article "Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl" (Mth. Ann. 70(1911), 161-165).

L'anàlisi de la demostració ens diu que a fi de distingir E_n i E_m ($n \neq m$), Brouwer aplica el fet que si $r > 0$ és prou petit, és impossible transformar el n -cub $I^n \subset E_n$ en un poliedre $K \subset E_n$ de dimensió geomètrica més petita que mitjançant una aplicació contínua $f: I^n \longrightarrow K$ i de manera que es compleixi que $\text{dist}(x, f(x)) < r$ qualsevol que sigui el punt $x \in I^n$.

D'altra banda, H. Lebesgue donà una demostració diferent del mateix teorema; aquesta demostració — que Brouwer provà que era incorrecte — fou publicada a continuació de l'article de

Brouwer a la mateixa revista:

"Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et $n + p$ dimensions" (Math. Ann. 70(1911)166-168).

El propi Lebesgue atribueix a Brouwer el fet d'haver sigut el primer en donar una demostració correcta del teorema. La demostració de Lebesgue està basada en una proposició que donà Jordan al se "Cours d'Analyse":

"Si cada punt d'un domini D de n dimensions pertany a un almenys dels conjunts tancats $C_1, C_2, \dots, C_p$ i si aquests conjunts són suficientment petits, hi ha punts en comú almenys a $(n+1)$ d'aquests conjunts".

Vista aquesta proposició, Lebesgue prova que els conjunts C_i poden triar-se de manera que no hi hagi punts en comú a més de $(n+1)$ conjunts. D'aquí, la impossibilitat d'un homeomorfisme entre E_n i E_{n+p} ($p > 0$) és immediata.

LES DEFINICIONS MODERNES DE DIMENSIO

L'any 1912, H. Poincaré publica a "Revue de Métaphysique et de Morale" (t. 20) l'article "Pourquoi l'espace a trois dimensions" on hi exposa un concepte de dimensió més intuitiu que rigorós. No obstant, Poincaré penetra profundament en el caràcter inductiu de la dimensió i observa la possibilitat de desconnectar un espai amb conjunts de dimensió més petita:

"De tots els teoremes de l'"anàlisis situs" el més important és el que afirma que l'espai té tres dimensions. Aquesta proposició és la que considerarem, i la formularem així: Que volem dir quan diem que l'espai té tres dimensions? ..."

"...si per separar un continu és suficient considerar com a seccions un determinat nombre d'elements, distingibles entre ells, diem que el continu té una dimensió; si, al contrari ,

per separar un continu és suficient considerar com a seccions un sistema d'elements que a la vegada formen un o més continus, direm que aquest continu té diverses dimensions".

" Si per separar un continu C , són suficients seccions que formen un o més continus d'una dimensió, direm que C té dimensió dos; si n'hi ha prou amb talls de dimensió dos com a màxim, direm que C és un continu de tres dimensions, etc...".

Aquestes paraules van influir sens dubte en Brouwer i l'induiren a donar - també per primera vegada - una definició de dimensió, publicada a l'article "Über den natürlichen Dimensionsbegriff" (Journ. für die reine and angew. Math. 142(1913), 146 - 152). Aquí, Brouwer defineix un invarinat topològic per a espais mètrics compactes (el "Dimensionsgrad") i prova que és exactament el "Dimensionsgrad" del n -cub I^n . La definició és inductiva:

a) Un espai té "Dimensionsgrad" igual a 0 si no té cap continu de cardinal més gran que $\aleph_0$.

b) Un espai X té "Dimensionsgrad" més petit o igual a n ($n \geq 1$) si per a tot parell de tancats disjunts A i B de X , existeix un conjunt tancat $L \subset X$ que separa X en dos conjunts disjunts que inclouen, respectivament, els conjunts A i B , de manera que el "Dimensionsgrad" de L és més petit o igual a $n-1$.

Brouwer no estudià amb profunditat aquest invariant i a més, el fet de no publicar l'article a Mathematische Annalen feu que aquesta definició quedés força oblidada: En realitat, ni Urysohn ni Menger coneixien l'article quan van iniciar llurs investigacions gairebé deu anys més tard.

P. Urysohn publicà l'any 1922 un treball als "Comptes Rendus de l'Académie de Paris" amb el títol "Les Multiplicités Cantorienes" on hi exposa un seguit de resultats que va desen-

volupar més tard en els seus dos articles pòstums: "Mémoire sur les Multiplicités Cantoriennes" (Fund. Math. 7(1925), 30-137 i 8(1926), 225-359) on hi ha una definició inductiva de dimensió per a espais mètrics i indica Urysohn que aquesta definició pot generalitzar-se a espais topològics més generals; a més, la funció de dimensió que es defineix és un invariant topològic, al mateix temps que la dimensió de l'espai euclidià E_n és precisament n .

Comença Urysohn definint el concepte de ε -separació d'un punt respecte d'un conjunt:

"Sigui C un conjunt arbitrari i x un element de C . La descomposició de C en tres conjunts disjunts dos a dos:

$$C = A \cup B \cup D$$

és una ε -separació del punt x si:

- 1) $x \in A$
- 2) $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset$
- 3) $A \cup B \subset B(x, \varepsilon)$

on $B(x, \varepsilon)$ és la bola mètrica de centre x i radi ε .

Es diu també que el conjunt B ε -separa el punt x de C .

Les definicions de conjunts de dimensió zero i superiors queden així:

Definició 1₀.— Si per a tot $\varepsilon > 0$ el punt x pot ser separat pel conjunt $\emptyset$ direm que aquest punt és de dimensió 0 respecte a C :

$$\dim_x C = 0$$

Definició 2₀.— Si tots els punts $x \in C$ són de dimensió 0 respecte a C , direm que C és de dimensió 0:

$$\dim C = 0$$

Les dimensions superiors es defineixen per inducció:

Definició 1_n.— Un punt x d'un conjunt C que no és de dimensió més petita que n respecte de C i tal que per a tot $\varepsilon > 0$ es pot ε -separar per un conjunt B de dimensió més petita que n és un punt de dimensió n respecte de C ;

$$\dim_x C = n$$

Definició 2_n.— Si un conjunt C té exclusivament punts de dimensió més petita o igual que n , direm que és de dimensió n si té almenys un punt x tal que $\dim_x C = n$:

$$\dim C = n$$

Segons Urysohn, qualsevol teorema general que faci referència a la teoria de la dimensió s'haurà de demostrar per inducció. Amb la finalitat de facilitar el procediment inductiu s'estableix a més que sigui $\dim \emptyset = -1$.

Uns mesos més tard que Urysohn, Karl Menger publica el treball: "Über die Dimensionalität von Punktmengen" en dues parts (Monat. Math. und Phys. 33(1923)148-160 i 34(1926)137-161) on hi ha una altra definició de dimensió també invariant per homeomorfismes i amb dimensió de E_n igual a n :

"Un conjunt M d'un espai mètric R és n -dimensional si compleix:

1. Per a tot punt $m \in M$ i tot entorn $U(m)$ existeix un entorn $U'(m) \subset U(m)$ de manera que la intersecció de M amb la frontera de $U'(m)$ és com a màxim de dimensió $n-1$.

2. Existeix com a mínim un punt $p \in M$ i un entorn $V(p)$ tal que la intersecció de M amb la frontera de qualsevol entorn $V'(p)$ incluit a $V(p)$ no és de dimensió més petita que $n-1$.

A més la dimensió del conjunt $\emptyset$ és -1 i cap altre conjunt té aquesta dimensió".

És segur que tant Urysohn com Menger desenvoluparen llurs investigacions amb independència un de l'altre. Urysohn s'anticipà uns mesos a Menger i també establí un major nombre de propietats bàsiques de la dimensió. No obstant, la mort prematura de Urysohn feu que fós Menger qui recollís els resultats en un llibre i a més donés un fort impuls a la teoria. D'altra banda si hom es restringeix als espais mètrics separables o més generalment a espais topològics regulars ambdues teories de la dimensió són equivalents.

Quan els treballs de Urysohn i Menger cridaren l'atenció de Brouwer, aquest descobrí que el seu "Dimensionsgrad" havia estat ignorat i manifestà que la seva definició donava lloc a una teoria de la dimensió igualment correcta, si bé diferent de les altres dues. Amb posterioritat va tenir lloc una forta polèmica entre Brouwer i Menger sobre qui havia sigut el primer en establir una funció de dimensió. Amb el pas del temps s'ha pogut comprovar que tant una com l'altre són prou interessants i les dues són estudiades actualment: La funció de Menger i Urysohn és la dimensió débilment inductiva "ind" i la de Brouwer és la dimensió fortament inductiva "Ind".

Amb aquestes definicions, la teoria de la dimensió comença a tenir un gran ressó. Més tard, l'any 1933, Čech, aprofitant la propietat usada per Lebesgue en la demostració de la invariancia de la dimensió, establí una altra funció de dimensió, la dimensió per recobriments "dim", segons la qual: "Un espai és de dimensió n si n és el més petit enter amb la propietat que l'espai pot quedar descompost en dominis tancats arbitràriament petits de manera que es tallin com a màxim $n+1$ d'aquests conjunts i tals que al menys $n+1$ tinguin intersecció diferent del conjunt $\emptyset$ ".

Pràcticament, amb aquestes tres definicions, la teoria de la dimensió es posà en marxa i començà a desenvolupar-se aprofitant que en aquells anys la topologia era una disciplina objecte de gran atenció entre els matemàtics.

BIBLIOGRAFIA
=====

- [1] . L.E.J. BROUWER. "Collected Works" Vol.2 . North - Holland.
Amsterdam. 1976.
- [2] . J.W. DAUBEN. "The Invariance of Dimension: Problems in the
Early Development of Set Theory and Topology". Hist.
Math. 2(1975),273-288.
- [3] . J. DIEUDONNE. "Abrégé d'Histoire des Mathématiques: 1700-1900"
Vol. II. Hermann. Paris. 1978.
- [4] . R. ENGELKING. "Dimension Theory". North - Holland. Amsterdam.
1978.
- [5] . W. HUREWICZ & H. WALLMAN. "Dimension Theory". Princeton Univ.
Press. Princeton. 1941.
- [6] . D.M. JOHNSON. "Prelude to Dimension Theory: The Geometrical
Investigations of Bernard Bolzano" Archiv Hist. Exact
Sci. 17(1977)261-295.
- [7] . D.M. JOHNSON. "The Problem of the Invariance of Dimension in
the Growth of Modern Topology". Parts I and II. Arch.
Hist. Exact Sci. 20(1979)97-188 ; 25(1981)85-267.
- [8] . H. LEBESGUE. "Oeuvres Scientifiques". Vol. IV. L'enseignement
Mathématique. Gèneve. 1973.
- [9] . K. MENGER. "Über die Dimensionalität von Punktmengen" Teil I
und II. Monat. Math. und Phys. 33(1923) 148-160 ;
34(1926)137-161.
- [10] . P. URYSOHN. "Mémoire sur les Multiplicités Cantoriennes". Fund.
Math. 7(1925)30-137 ; 8(1926)225-359.

=====