LES MATEMÀTIQUES I LES
ESCALES MUSICALS

Joan Girbau

Per què l'escala musical -la del teclat del piano, per exemple- té set notes, o dotze si es compten els sostinguts? La raó d'aquest fet cal cercar-la en els grecs, i concretament en Pitàgoras.

L'objecte d'aquest article és presentar la teoria pitagòrica de les escales musicals des d'un punt de vista axiomàtic. A més d'això, s'obtenen resultats nous que posen en relleu la riquesa harmònica d'altres possibles escales més simples (les escales cromàtiques, temperades de cinc i set notes). També es demostra que per a superar, des de la vessant de l'harmonia, l'escala usual cromàtica -la del teclat del piano- caldrien 29 notes com a mínim en cada octava.

Sovint farem al.lusions a l'escala usual sense haver-la definit prèviament. Aquestes referències només serviran per a fixar les idees, però no seran essencials per a la lectura del text.

§ 1. Distància entre dos sons

Als efectes d'aquesta redacció, identificarem un so amb la seva freqüència, de manera que el conjunt de sons serà $\mathbb{R}^+$ (reals positius).

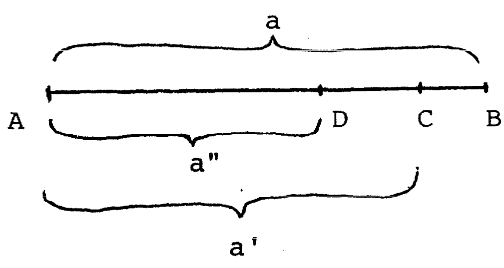
L'home difícilment és capaç d'identificar un so aïlladament, sense comparar-lo amb cap altre. El que sí resulta més fàcil és comparar sons i determinar la "distància" entre ells. Què significa distància entre dos sons? Encara que no ens hagin definit mai aquest concepte, estem tips de sentir que aquest interval musical és més curt o més llarg que aquell altre. Siguin u_1, u_2, u_3, u_4 quatre sons (que hem identificat amb les seves freqüènies). Suposem $u_1 < u_2$ i $u_3 < u_4$. Quan diem que l'interval musical determinat pels dos primers sons és igual (o té la mateixa longitud) que el determinat pels dos últims, el que en realitat volem dir és que

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_4}{u_3}$$

Quan diem que el primer interval és més curt que el segon volem dir que

$$\frac{u_2}{u_1} < \frac{u_4}{u_3}$$

Per a convèncer-nos que aquesta definició s'ajusta a la idea musical prèvia que tenim d'aquests conceptes, podem fer el següent experiment. Prenem una corda de guitarra de longitud a subjecta pels dos extrems A i B. Prenem punts C i D tal com indica el dibuix, però de manera que les longituds a' de AC i a'' de AD compleixin $a'' = (a')^2/a$. Pri



mer fem vibrar AB. Emetrà un so de freqüència $u_B = K/a$ on K és una certa constant positiva. Posant el dit sobre C fem vibrar AC. Emetrà un so de freqüència $u_c = K/a'$. Posant el dit sobre D fem vibrar AD. Emetrà un so de freqüència $u_D = K/a''$. Si repetim això moltes vegades i comparem els sons, ens semblarà que l'interval musical format pels dos primers sons és igual que el format pels dos últims. En canvi si desplacem D una mica cap a la dreta tindrem la sensació que l'últim interval musical és més curt que el primer.

Tot això ens suggereix la conveniència de definir distància entre dos sons u_1, u_2 amb $u_2 > u_1$, com el quocient u_2/u_1. Si procedicíssim així, però, la distància entre un so i ell mateix seria 1. Encara més, si $u_1 < u_2 < u_3$, com que

$$\frac{u_3}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1}$$

es compliria que la distància entre u_1 i u_3 -escrivim $d(u_1, u_3)$- seria el producte $d(u_1, u_2) \cdot d(u_2, u_3)$ (en comptes de la suma). Per a obtenir una distància, en el sentit matemàtic d'aquest mot, no tindriem més que definir

$$d(u, v) = k \left| \log \frac{v}{u} \right|$$

on k és una constant positiva que quedaria determinada per l'elecció de la unitat de mesura. Aquesta distància respon a la idea musical que tenim de longitud d'intervals.

§ 2 Què és una escala musical

No sé des de quan l'home ha tendit a identificar d'alguna manera un so amb el de freqüència doble, però suposo que des de molt antic. Els grecs, no cal dir, ja ho feien. Si fem cantar una mateixa cançó a un home i una dona, freqüentment ens trobarem que, tot i semblant que fan exactament els mateixos sons, la dona, en realitat, va emetent sons de freqüència doble que els de l'home (canta una 8^a més alta).

Definirem una escala musical com un subconjunt E del conjunt de ferqüències (és a dir, de $\mathbb{R}^+$) subjecte a complir les següents propietats:

A1) Existeix una bijecció f entre el conjunt $\mathbb{Z}$ dels enters i E que conserva l'ordre. És a dir, si $i < j$, $f(i) < f(j)$.

A2) Si $u \in E$, també són de E $2u$ i $u/2$.

La propietat A1 tradueix el fet que una escala és ilimitada cap amunt i cap avall. Per exemple, l'escala tradicional és

..... si, do, re, mi, fa, sol, la, si, do, re....

La propietat A2 diu que si una escala conté una nota, també conté la mateixa nota una 8^a més alta i una 8^a més baixa.

Fins ara parlavem de sons. Per primera vegada, sense adonar-nos-en, hem utilitzat el mot nota. Si E és una escala musical, anomenarem nota tot element de E.

Si E és una escala musical, podem definir una relació d'equivalència a E (que designarem per $\equiv$) dient que u i v de E són equivalent si $u = 2^q v$ amb q enter.

Proposició El conjunt quocient $E/\equiv$ és un conjunt finit.

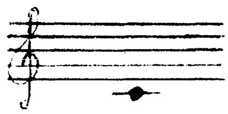
Demostració Sigui u_1 un element qualsevol de E. Entre u_1 i $2u_1$ hi haurà un nombre finit d'elements de E ja que en cas contrari no es compliria A1. Siguin $u_2 \ldots u_r$ aquests element. Qualsevol $u \in E$ és equivalent a una de les notes $u_1 \ldots u_r$. En efecte, sigui k el menor enter tal que

$$(*) \quad u_1 \leqslant 2^k u$$

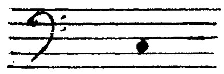
Llavors $2^k u < 2u_1$, perquè si no, tindriem $2u_1 \leqslant 2^k u$, és a dir, $u_1 \leqslant 2^{k-1} u$, i k no seria el menor enter que compleix (*). Per tant, resumint, $u_1 \leqslant 2^k u < 2u_1$. Llavors $2^k u$ haurà de ser una de les notes $u_1 \ldots u_2$ i la proposició queda demostrada.

A les notes d'una escala se les hi assigna usualment un nom, de manera que dues notes equivalents porten el mateix nom. Usualment es fa l'abús de llenguatge que consisteix a denominar "notes" també els elements de $E/\equiv$. Quan diem que l'escala musical usual té set notes, ens referim als elements de $E/\equiv$. Quan diem, en canvi, que l'escala té infinites notes, ...si, do, re, mi, fa, sol, la, si, do, re... ens referim amb la paraula la nota als elements de E.

A vegades els músics utilitzen subíndexs per a distingir notes equivalents per $\equiv$. Així per exemple el do que es representa per



és conegut per do_3; el do que es representa per



(que és una octava més baix) és conegut per do_2, etc. Segons aquesta convenció l'escala usual és

... la_1, si_1, do_2, re_2, mi_2 .... si_2, do_3.......

No cal dir que en aquest sistema de denominació de les notes s'utilitzen també ídexs negatius. Incomprensiblement, però, no s'utilitza el subíndex o, és a dir,

...la_{-1}, si_{-1}, do_1, re_1.......

Encara que l'escala usual té 7 notes, hi ha hagut pobles que han basat el seu sistema musical en escales de diferent nombre de notes. A priori es poden concebre escales de qualsevol nombre de notes.

§ 3 Escales equivalents

Les notes de l'escala usual es poden definir correctament donant la freqüència de cada una d'elles. Ara bé, aquestes freqüències han sofert canvis en els últims segles. Per a afinar pràcticament un instrument s'utilitza un diapasó, que dóna amb molta exactitud el la_3, i a partir d'aquesta nota s'afinen totes les altres. El primer diapasó que es va utilitzar a l'Òpera de París el 1699 donava una nota de freqüència 404 vibracions per segon. Durant el segle XVIII va haver-hi grans diferències de criteri a l'hora d'afinar els instruments i es va tendir a anar elevant la freqüència del la_3. El 1879 una comissió internacional es va reunir per a fixar un criteri únic per a l'afinació del la_3 i es va acordar establir la seva freqüència en 435 vibracions per segon. No obstant, el 1939, un altre congrés internacional va modificar aquesta freqüència, deixant-la en 440 vibracions. Durant alguns anys van anar convivint les 435 vibracions amb les 440, encara que últimament aquesta última freqüència s'ha imposat definitivament.

He explicat aquesta història del la_3 per a poder fer la següent reflexió. Per a nosaltres, una escala és un subconjunt E de $\mathbb{R}^+$ que compleix A1 i A2. Per tant, segons la nostra definició, totes les escales basades en les diferents freqüències del la_3 són escales diferents. No obstant, un músic tendiria a dir que es tracta de la mateixa escala que al llarg dels segles s'ha anat apujant de to. Per tal de recollir aquesta manera de pensar, anem a definir una relació d'equivalència entre escales, que faci equivalents una escala i la que s'obté d'aquesta, apujant per igual el to de totes les notes.

Dues escales E i E' direm que són equivalents si existeix un número positiu K tal que $E' = K.E$, on $K.E$ significa el subconjunt de $\mathbb{R}^+$ que s'obté multiplicant per K tots els elements de E.

Observem que si $u_1, u_2 \in E$, segons la definició de distància donada a §1, $d(u_1,u_2) = d(ku_1,ku_2)$. Per tant, dues escales equivalents mantenen les mateixes distàncies entre totes les notes.

D'ara endavant, sovint utilitzarem la paraula escala per a designar una classe d'equivalència d'escales, encara que això representi un abús de llenguatge.

§ 4 Axioma de Pitàgoras

Fins ara, amb els axiomas A1 i A2 són imaginables una infinitat d'escales diferents (de classes d'equivalència d'escales). Podem pensar en escales d'una sola nota, de dues, de tres ..., de n notes. I encara, dins de les escales possibles de n notes, n'hi ha una infinitat segons la relació de distàncies entre les notes. Hauriem d'afegir als axiomes A1 i A2 de la definició d'escala altres axiomes raonables per tal de limitar-ne el nombre. Un d'aquests axiomes és el següent:

A3) (Axioma de Pitàgoras). Si $u \in E$, $3u$ també ho és.

Per què és natural i raonable demanar que una escala E compleixi A3?

Sabem que tot so de freqüència u es descompon segons la teoria de Fourier en sons sinusoïdals de freqüències u, 2u, 3u, 4u..., d'amplituds cada vegada més petites. El so sinusoïdal de freqüència u es diu so fonamental i els de freqüència 2u, 3u... es diuen harmònics del so fonamental. Fixem-nos que si $u \in E$, 2u i 4u són de E en virtud de A2. L'axioma A3, si l'acceptéssim i l'incorporésim a la definició d'escala, ens garantiria que 3u fós també de E, amb la qual cosa cada nota de l'escala tindria els seus primers harmònics dintre l'escala ($2u, 3u, 4u \in E$).

Un altre axioma una mica més fort, que potser també seria lògic exigir, seria el següent:

A4) Si $u \in E$, $3u$ i $u/3 \in E$. Aquest axioma seria natural per analogia amb A2 on hem exigit no tan sols que si $u \in E$, la mateixa nota una octava superior fós de E, sinó que també la de l'octava inferior ho fós. A A3 exigim que si $u \in E$, $3u \in E$. Però semblaria lògic demanar, per tal de fer homogènia l'escala, que u procedís també d'una altra nota v per multiplicació per 3. Això és el que demana A4.

Pitàgoras no coneixia la teoria dels harmònics, però segurament s'hauria adonat que si tenia dues cordes subjectes pels extrems, de manera que una d'elles fós el triple de llarga que l'altra, si feia vibrar la més gran, la més curta es posava a vibrar lleugerament.

Ara que ja us tenia mig convençuts de la conveniència d'afegir A3 a la definició d'escala -i potser A4 i tot- agafeu una mica d'aire abans de continuar llegint, car podrieu tenir un petit ensurt.

<u>Teorema</u>.- A1, A2 i A3 són incompatibles.

<u>Demostració</u>.- Anem a veure que si E és un subconjunt de $\mathbb{R}^+$ que compleix A2 i A3, no pot complir A1.

Per a cada enter positiu q, denominem $k(q)$ el més gran enter positiu tal que $2^{k(q)} < 3^q$. Es complirà $2^{k(q)} < 3^q < 2^{k(q)+1}$, és a dir,

$$1 < \frac{3^q}{2^{k(q)}} < 2$$

Sigui $u \in E$. Tindrem

$$u < \frac{3^q u}{2^{k(q)}} < 2u$$

Cada una d'aquestes tres notes és de l'escala en virtut de A2 i A3. I això passarà per a cada enter positiu q. Ara bé, si $q \neq q'$,

$$\frac{3^q}{2^{k(q)}} \neq \frac{3^{q'}}{2^{k(q')}}$$

ja que $3^q\, 2^{k(q')} \neq 2^{k(q)} 3^{q'}$. Això implica que entre u i 2u hi ha infinites notes de l'escala, una per a cada q. Per tant A1 no es pot complir i el teorema queda demostrat.

Què farem ara? Tan naturals com semblaven A3 i A4!

El que farem d'ara endavant és construir escales que, encara que no compleixin A3, almenys en mantinguin l'esperit.

§ 5 Escales pitagòriques. L'escala de les set notes o escala natural.

Donades n freqüències $u_1 \dots u_n$ designarem per $< u_1 \dots u_n >$ la mínima escala que les conté, és a dir, el conjunt $\{2^q u_i,\ q \text{ enter},\ i = 1 \dots n\}$.

Donada una escala E anomenarem norma de E la màxima distància entre dues notes consecutives de E.

Definició d'escala pitagòrica. Donada una freqüència u i un número positiu A menor que la distància d(u,2u), direm que E és una escala pitagòrica (associada a u i A) si és de la forma $E = <u, 3u, \dots, 3^q u>$ on q és el primer enter positiu per al qual la norma de $<u, 3u \dots 3^q u>$ és menor o igual que A.

L'elecció de u no té importància, ja que si es parteix de u' per comptes de u, s'arriba a una escala equivalent.

Si només estem interessats en classes d'equivalència d'escales, podrien suposar, per exemple, $u = 1$. Ara bé, l'elecció de A és important i determina l'escala. A ens diu el grau d'espessor que volem que tingui l'escala: la màxima separació que permeten entre notes. Anem a veure com podem fer eleccions "naturals" de A.

Partim de l'escala pitagòrica de 3 notes $\langle u, 3u, 9u \rangle$. Com que hem suposat $u = 1$, aquesta escala serà $\langle 1,3,9 \rangle$. El representant de 3 a l'interval $[1,2]$ (és a dir, l'única nota equivalent a 3 per $\equiv$ en aquest interval) serà $3/2$. I el representant de 9 en aquest interval serà $9/8$. L'escala serà doncs

$$\ldots\ 1 < 9/8 < 3/2 < 2\ \ldots$$

on els punts suspensius indiquen que es repeteixen les notes aquí escrites multiplicades o dividides successivament per 2.

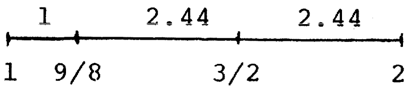
Calculem les distàncies entre les successives notes d'aquesta escala.

$d(1, 9/8) = k \log(9/8)$, on k és la constant que hem utilitzat en la definició de distància. $d(9/8, 3/2) = k \log (4/3) = d(3/2, 2)$. Per a comparar aquestes distàncies prenem per unitat de distàncies la més petita, $d(1, 9/8)$, la qual cosa pressuposa prendre $k = (\log (9/8))^{-1}$. Llavors tindrem:

$$d(1, 9/8) = 1$$

$$d(9/8, 3/2) = d(3/2, 2) = 2.442\ldots$$

$$d(1,2) = 5.884\ldots$$



L'elecció de A en la definició d'escala pitagòrica farà que tinguem una escala més o menys espessa. L'escala tradicional de 7 notes, que anomenarem escala natural, perquè així es coneix entre els músics, sortirà a l'elegir $A = d(1, 9/8) =$ (amb la nostra elecció d'unitat de distàncies) $= 1$. Això equival a no permetre separacions més grans que 1 entre dues notes (Tingui's present que amb aquestes unitats una octava té longitud 5.884...).

Construim a continuació detalladament l'escala pitagòrica associada a $A = 1$.

Com que la norma de $<1,3,9>$ és $2.44... > 1$, l'escala que construim contrindrà 3^3. Numerem, per comoditat, les notes que hem anat adjuntant. Diem $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3^2$, $n_4 = 3^3$. Representem aquests notes a l'interval $[n_1, 2n_1]$. Llurs representants en aquest interval seran $n_1 = 1$, $n_2 = 3/2$, $n_3 = 3^2/2^3 = 9/8$, $n_4 = 3^3/2^4 = 27/16$. L'ordenació d'aquests números és $n_1 < n_3 < n_2 < n_4 < 2n_1$ i les relacions successives entre aquests números (que necessitem per a calcular les distàncies), n_3/n_1, n_2/n_3, n_4/n_2, $2n_1/n_4$ seran respectivament $9/8$, $4/3$, $9/8$, $32/27$. Com que $4/3$ és el més gran d'aquests quocients, la norma d'aquesta escala és $(\log(4/3))/\log(9/8) > 1$. Per tant, hem de continuar el procés i adjuntar $n_5 = 3^4$. El representant de n_5 a l'interval $[n_1, 2n_1]$ és $3^4/2^6 = 81/64$. L'ordenació d'aquestes notes és $n_1 < n_3 < n_5 < n_2 < n_4 < 2n_1$. Les relacions successives entre aquests números són $9/8$, $9/8$, $32/27$, $9/8$, $32/27$. Com que $32/27 = 1.\widehat{185} > 1.125 = 9/8$, la norma de $< 1,3,3^2,3^3,3^4 >$ és $(\log(32/27))/\log(9/8) > 1$. Per tant hem de continuar el procés i adjuntar $n_6 = 3^5$. El representant de n_6 a $[n_1, 2n_2]$ és $3^5/2^7 = 243/128$, que està entre n_4 i $2n_1$. Tindrem doncs $n_1 < n_3 < n_5 < n_2 < n_4 < n_6 < 2n_1$. Les relacions successives entre aquests números són $9/8$, $9/8$, $32/27$, $9/8$, $9/8$, $256/243$. La norma continua essent doncs la mateixa d'abans. Hem d'adjuntar donc $n_7 = 3^6$. El representant de n_7 a $[n_1,2n_1]$ és $3^6/2^9 = 729/512$, que està situat entre n_5 i n_2. Tindrem doncs $n_1 < n_3 < n_5 < n_7 < n_2 < n_4 < n_6 < 2n_1$. Les relacions successives entre aquests números són $9/8$, $9/8$, $9/8$, $256/243$, $9/8$, $9/8$, $256/243$. Com que $9/8 > 256/243$, la norma d'aquesta escala és $(\log(9/8))/\log(9/8) = 1$. Hem de parar doncs el procés. Com que

$$(\log(256/243))/\log(9/8) = 0.44247...$$

les distàncies entre les successives notes de l'escala serán aproximadament:

$$1,\ 1,\ 1,\ 0.44,\ 1,\ 1,\ 0.44$$

Si el número 0.44242... que ens ha sortit hagués estat exactament 0.5 aquesta escala seria equivalent a l'escala del piano amb n_1 = fa, n_3 = sol, n_5 = la, n_7 = si, n_2 = do, n_4 = re, n_6 = mi:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \text{mi}, & \text{fa}, & \text{sol}, & \text{la}, & \text{si}, & \text{do}, & \text{re}, & \text{mi}, & \text{fa}\ldots \\ & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \\ & n_1 & n_3 & n_5 & n_7 & n_2 & n_4 & n_6 & \end{array}$$

Però fixem-nos que en l'escala que ens ha sortit a nosaltres, i que anomenarem "escala pitagòrica natural", $d(mi, fa)=d(si,do)= = 0.443\ d(do,re)$, mentre que en l'escala usual del piano

$$d(mi, fa) = d(si, do) = 0.5\ d(do,re).$$

§ 6 Escala pitagòrica cromàtica

Recordem que l'escala pitagòrica natural era l'escala pitagorica associada al número $A = d(u, (9/8)u)$, distància que hem pres com a unitat, és a dir, $A = 1$. Quina escala pitagòrica ens sortiria si prenguéssim $A < 1$, però molt pròxim a 1? Veurem que ens sortiria una escala de 12 notes que anomenarem escala pitagòrica cromàtica. Prenem $A = 0.99$, per exemple. (A posteriori veurem que ens sortiria la mateixa escala per a tot A tal que $0.56 < A < 1$). Recordem que ja teniem l'escala $<1,3,\ldots, 3^6>$, les notes de la qual haviem designat per $n_1\ldots n_7$. Com que la norma d'aquesta escala és 1 i ara hem pres $A = 0.99$, hem de continuar el procés i adjuntar $n_8 = 3^7$. El representant de n_8 a l'interval $[n_1, 2n_1]$ és $3^7/2^{11} = 2187/2048$, que està situat entre n_1 i n_3. Tenim doncs:

$$n_1 < n_8 < n_3 < n_5 < n_7 < n_2 < n_4 < n_6 < 2n_1 .$$

Les relacions successives entre aquests números són:

$$2187/2048,\ 256/243,\ 9/8,\ 9/8,\ 256/243,\ 9/8,\ 9/8,\ 256/243.$$

El més gran d'aquests números és $9/8$. La norma d'aquesta esca la és doncs 1. Com que $A = 0.99$, hem de continuar el procés i adjuntar $n_9 = 3^8$. El representant de n_9 a $[n_1, 2n_1]$ és $3^8/2^{12} = 6501/4096$, que està entre n_2 i n_4. Tenim doncs:

$$n_1 < n_8 < n_3 < n_5 < n_7 < n_2 < n_9 < n_4 < n_6 < 2n_1$$

Les relacions successives entre aquests números són:

$$2187/2048,\ 256/243,\ 9/8,\ 9/8,\ 256/243,\ 2187/2048,$$
$$256/243,\ 9/8,\ 256/243.$$

La norma d'aquesta escala continua essent 1. Cal doncs adjuntar $n_{10} = 3^9$. El representant de n_{10} a $[n_1, 2n_1]$ és $3^9/2^{14} = 19683/16384$, que està entre n_3 i n_5. O sigui:

$$n_1 < n_8 < n_3 < n_{10} < n_5 < n_7 < n_2 < n_9 < n_4 < n_6 < 2n_1$$

Les relacions successives entre aquests números són:

$$2187/2048,\ 256/243,\ 2187/2048,\ 256/243,\ 9/8,\ 256/243$$
$$2187/2048,\ 256/243,\ 9/8,\ 256/243.$$

La norma continua essent 1. Cal adjuntar $n_{11} = 3^{10}$. El representant de n_{11} a l'interval $[n_1, 2n_1]$ és $3^{10}/2^{15} = 59049/32768$, que està situat entre n_4 i n_6. Tenim doncs:

$$n_1 < n_8 < n_3 < n_{10} < n_5 < n_7 < n_2 < n_9 < n_4 < n_{11} < n_6 < 2n_1$$

Les relacions succesives són:

2187/2048, 256/243, 2187/2048, 256/243, 9/8, 256/243,
2187/2048, 256/243, 2187/2048, 256/243, 256/243.

La norma continua essent 1. Cal adjuntar $n_{12} = 3^{11}$. El representant de n_{12} a $[n_1, 2n_1]$ és $3^{11}/2^{17} = 177147/131072$, que està situat entre n_5 i n_7.
Tenim:

$$n_1 < n_8 < n_3 < n_{10} < n_5 < n_{12} < n_7 < n_2 < n_9 < n_4 < n_{11} < n_6 < 2n_1$$

Les relacions successives entre aquests números són:

2187/2048, 256/243, 2187/2048, 256/243, 2187/2048,
256/243, 256/243, 2187/2048, 256/243, 2187/2048,
256/243, 256/243.

Com que 2187/2048 > 256/342, la norma d'aquesta escala és (log(2185/2048))/log (9/8) = 0.5575254... . Hem doncs d'aturar el procés. Les distàncies succesives entre aquestes notes seran aproximadament:

0.56, 0.44, 0.56, 0.44, 0.56, 0.44, 0.44, 0.56, 0.44, 0.56, 0.44, 0.44

Fixem-nos en la distribució d'aquestes 12 notes. n_8 està una mica per sobre de n_1; a una distància de 0.56. Designem n_8 per n_1 # . n_9 està per sobre de n_2, a una distància de 0.56. Designem n_9 per n_2 # . Procedint així obtindrem:

$$\begin{aligned} n_8 &= n_1 \# \\ n_9 &= n_2 \# \\ n_{10} &= n_3 \# \\ n_{11} &= n_4 \# \\ n_{12} &= n_5 \# \end{aligned}$$

n_{13} seria n_6 # , però ja no tenim n_{13} a la nostra escala. El signe # es denomina sostingut i la nota n # es denomina sostingut de n. Els sostinguts pitagòrics apujen una nota en una distància de 0.56 aproximadament (exactament 0.5575254...). Queda clar que el mi # i el si # (que serien n_6 # i n_7#) són sons que no formen part de l'escala. Ara bé, el mi # seria un so situat una mica per sobre del fa, ja que el d(mi, fa) = 0.44 i d(mi, mi #) = 0.56. Dos sons situats a una distància de 0.56 - 0.44 es diu que estan separats per un coma pitagòric. És el cas del fa i mi # o bé del do i si #.

§ 7 Tornem a l'axioma A4

Recordem que al començament de § 4 l'axioma A3 ens semblava natural, però també ens semblava natural A4, que era més fort que A3. No obstant, com que hem demostrat que A3 era incompatible amb A1 i A2, hem tractat de mantenir l'esperit de A3, i això ens ha conduït a la definició d'escala pitagòrica de la forma $<u, 3u, \dots 3^q u>$. Però, per un procediment anàleg, no podriem tractar de mantenir l'esperit de A4?. No podriem adjuntar a u successivament $3u$, $u/3$, $3^2 u$, $u/3^2 \dots$ i aturar el procés quan tinguésim una norma prou petita? Deixo al lector el fet de constatar, per una raonament de dues línies, que procedint així arribariem a escales equivalents a les que hem trobat.

§ 8 L'escala temperada

Si modifiquem l'escala pitagòrica cromàtica de 12 notes imposant que les distàncies entre dues notes successives siguin 1/2, per comptes de l'alternància 0.44, 0.56 que hem trobat, obtindrem una escala que anomenarem escala cromàtica temperada de 12 notes. Si a l'escala pitagòrica de 7 notes de § 5, que allà haviem denominat escala pitagòrica natural, imposem que $d(si, do) = d(mi, fa) = (1/2)\, d(do, re) = (1/12)\, d(u, 2u)$, per comptes de $d(si, do) = 0.44\, d(do, re)$, obtenim una escala que anomenarem escala temperada natural.

Prenem una freqüència deteminada u. Consederem les 12 notes següents:

$$u,\ 2^{\frac{1}{12}} u,\ 2^{\frac{2}{12}} u,\ \dots,\ 2^{\frac{11}{12}} u,$$

i les que s'obtenen d'aquestes multiplicant i dividint successivament per 2. Òbviament els quocients entre dues notes successives valen sempre $2^{\frac{1}{12}}$. Per tant estaran totes a la mateixa distància. Constituiran doncs l'escala cromàtica temperada de

12 notes.

Per a posar de manifest la diferència entre l'escala natural pitagòrica i l'escala temperada, calculem les freqüències, en les dues escales, do_3, re_3, mi_3, fa_3, sol_3, la_3, si_3, partint de la convenció que la freqüència de la_3 sigui 440 vibracions per segon en les dues escales. Comencem per les freqüències de l'escala pitagòrica. Escrivim primer la relació de freqüències que hi ha entre cada dues notes successives:

$$do_3 - 9/8 - re_3 - 9/8 - mi_3 - 256/243 - fa_3 - 9/8 -$$
$$- sol_3 - 9/8 - la_3 - 9/8 - si_3 ..$$

Per tant:

$$\frac{la_3}{do_3} = \frac{la_3}{sol_3} \cdot \frac{sol_3}{fa_3} \cdot \frac{fa_3}{mi_3} \cdot \frac{mi_3}{re_3} \cdot \frac{re_3}{do_3} =$$

$$= \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{256}{243} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{2^8 . 3^8}{2^{12} . 3^5} = \frac{27}{16}$$

Per tant $do_3 = (16/27)\ la_3 = 260.74$. Anàlogament $re_3 = (2/3) la_3 = 293.33$; $mi_3 = (3/4) la_3 = 330$; $fa_3 = (64/81) la_3 = 347.65$; $sol_3 = (8/9) la_3 = 391.11$; $si_3 = (9/8) la_3 = 495$.

A l'escala temperada les relacions successives de freqüència són:

$$do_3 - 2^{\frac{2}{12}} - re_3 - 2^{\frac{2}{12}} - mi_3 - 2^{\frac{1}{12}} - fa_3 - 2^{\frac{2}{12}} - sol_3 -$$

$$- 2^{\frac{2}{12}} - la_3 - 2^{\frac{2}{12}} - si_3$$

Per tant tenim:

$$\frac{la_3}{do_3} = 2^{\frac{2+2+1+2+2}{12}} = 2^{\frac{9}{12}}$$

Per tant $do_3 = 2^{-\frac{9}{12}} la_3 = 261.63$. Anàlogament $re_3 = 2^{-\frac{7}{12}} la_3 =$ $= 293.66$; $mi_3 = 2^{-\frac{5}{12}} la_3 = 329.63$; $fa_3 = 2^{-\frac{4}{12}} la_3 = 349.23$; $sol_3 = 2^{-\frac{2}{12}} la_3 = 392.00$; $si_3 = 2^{\frac{2}{12}} la_3 = 493.88$.

§ 9 L'escala cromàtica temperada des del punt de vista axiomàtic. Possibles altres escales cromàtiques temperades: la de 5 notes, la de 7 notes i la de 29 notes.

Una escala E direm que és cromàtica i temperada (abreujadament, escala temperada) si a més de complir A1 i A2 de la definició d'escala compleix:

A5) La distància entre dues notes consecutives és constant.

Si E és una escala temperada i $u \in E$, $3u$ no serà mai de E ja que si existís un u tal que $u \in E$ i $3u \in E$, és inmediat veure que això passaria per a tot u i es compliria A3. És immediat veure que si $u \in F$, la mínima distància entre $3u$ (que no és de E) i una nota de E, és independent de u. Aquesta mínima distància (que no depèn de u) serà anomenada desviació pitagòrica de E i designada per $DP(E)$. $DP(E)$ ens mesura el grau de compliment de A3 per E. Quan $DP(E)$ sigui molt petit, encara que $3u$ no sigui de l'escala, estarà tan aprop d'una nota de l'escala que, a efectes pràctics, serà com si $3u$ fós de E.

Com es mesura DP(E)?

Sigui E_n una escala cromàtica temperada de n notes, que sõn

$$u,\ 2^{\frac{1}{n}} u,\ \ldots,\ 2^{\frac{n-1}{n}} u\ .$$

Prenem ara per comoditat la unitat de distància de tal manera que la distància entre u i 2u sigui log 2, la qual cosa suposa prendre $k = 1$ en la fórmula que dóna la distància. La distància entre dues notes consecutives de E_n serà (log 2)/n, de manera que les notes, atenent a les seves distàncies consecutives, estaran distribuïdes com els números:

$$\ldots,\ -\frac{\log 2}{n},\ 0,\ \frac{\log 2}{n},\ \frac{2\log 2}{n},\ldots,\frac{(n-1)\log 2}{n},\ \log 2\ldots$$

El 0 representa la nota de freqüència u. El so de freqüència 3u (que no és de l'escala) vindrà representat per log 3. Queda clar doncs que si prenem l'enter positiu m que fa mínima la diferència

$$\left| \frac{m \log 2}{n} - \log 3 \right| ,$$

precisament aquesta diferència serà $DP(E_n)$.

Amb l'ajut d'una petita claculadora programable m'he entretingut a calcular $DP(E_n)$ pels diferents $n = 2,3,4,5\ldots$, i he obtingut els següents valors:

n		DP
2	......	0.0256
3	......	0.0246

4	......	0.0256
5	......	0.0045
6	......	0.0246
7	......	0.0041
8	......	0.0121
9	......	0.0089
10	......	0.0045
11	......	0.0119
12	......	0.0005
13	......	0.0092

etc.

Veiem que per a $n = 12$ s'obté un valor de DP extraordinàriament més petit que tots els altres. Això vol dir que l'escala cromàtica temperada de 12 notes (la usual del piano) és, entre totes les de la llista anterior, la que més aproximadament compleix A3. Per a cada $u \in E_{12}$ encara que $3u$ no sigui de E_{12}, està tan sorprenentment aprop d'una nota de E_{12} que, a efectes pràctics, és com si E_{12} complís A3. Fixem-nos per exemple en els càlculs que hem fet a § 8. Allà hem trobat que el do_3 de l'escala temperada tenia 261.63 vibracions. El triple d'aquesta freqüència és 784.89: Ara bé, $sol_4 = 2\ sol_3 =$ $= 784.00$. L'error és només de 0.89 vibracions per segon. Increïble!.

Amb la calculadora vaig seguir calculant desviacions DP per a $n = 14, 15, 16, \ldots$ amb l'esperança de trobar un n per al qual $DP(E_n)$ fós més petit que $DP(E_{12})$. El primer n que compleix això és $n = 29$, per al qual DP val 0.00037. Així doncs, l'escala temperada de 29 notes és la primera que millora la usual de 12 notes en grau de compliment de A3, encara que aquest millorament és petítissim. Albert Castellet (fill de Manuel Castellet), que va tenir ocasió de llegir el manuscrit provisional d'aquest article, va seguir calculant desviacions DP per a $n = 30,31...$ fins a arribar a $n = 15601$. Vaig a resumir els seus resultats. Per a $n = 41$, DP = 0.00012, sensiblement inferior a $DP(E_{29})$. Però $DP(E_{53})$ encara és molt millor, val 0.000017. Un resultat curiós és el següent: L'escala temperada de 665 notes té un DP de l'ordre de 10^{-7}. Per a millorar això, hi ha que saltar ja a una escala de 15601 notes, per a la qual el DP és de l'ordre de 10^{-9}.

Si ens interessem per les escales (temperades i cormàtiques) de poques notes, repassant el quadre de valors anterior constatem que les que millor compleixen A3 són les de 5 i 7 notes (Dividir l'octava en cinc parts iguals, o bé en set parts iguals).

Seria apassionant fabricar un instrument amb aquestes escales i tractar de fer-hi música. Seria una música més simple, mes primitiva amb gran capacitat, però, d'acords (per complir A3 aproximadament).

§ 10. Escales amb origen: les diverses escales gregues i la nostra escala menor.

Malgrat que tota escala, per definició, és indefinida cap amunt i cap avall (isomorfa a $\mathbb{Z}$), quan ens demanen que diguem l'escala natural, diem sempre: do, re, mi, fa, sol, la, si, do. No diem mai: re, mi, fa, sol, la, si, do, re. I, no obstant, les dues són exactament la mateixa si es consideren perllongades indefinidament pels dos cantons.

Sovint doncs, a més de donar el conjunt E de totes les notes d'una escala, donem un origen de E.

Anomenarem escala amb origen tot parell $(E, [u_o])$ on E és una escala i $[u_o]$ una classe d'equivalència de notes de E per la relació $\equiv$ que identifica una nota amb la de freqüència doble.

Dues escales amb origen $(E, [u_o])$ i $(E', [u'_o])$ direm que són equivalents si existeix una constant positiva K tal que $E' = K.E$ i $[u_o] = K.\, u'_o$. Sovint ens preocuparem només de classes d'equivalència d'escales amb origen.

Sigui E l'escala pitagòrica natural (la de 7 notes). Els grecs utilitzaven la següent terminologia:

L'escala	(mi, E)	era	l'escala	dòrica
"	(la, E)	"	"	hipodòrica
"	(re, E)	"	"	frígia
"	(sol, E)	"	"	hipofrígia
"	(do, E)	"	"	lídia
"	(fa, E)	"	"	hipolídia
"	(si, E)	"	"	mixolídia

Observem en primer lloc que totes aquestes escales no són pas equivalents com escales amb origen, ja que les úniques constants K per a les quals $E = K.E$ són de la forma 2^q, q enter, que transforma cada classe $[u]$ en ella mateixa.

L'escala hipodòrica és la nostra escala menor. La hipolídia és la que ens ha sortit a nosaltres de manera natural a l'apartat 5, aplicant els axiomes. Recordem que allà anomenàvem n_1 = fa i ens ha sortit fa, sol, la, si, do, re, mi. Quant a l'escala dòrica, els afeccionats a la música recordaran la tocata i fuga dòrica de Bach (BWV 538), basada en aquesta escala.

XXI OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Els dies 18 i 19 del passat mes de gener es va celebrar la fase nacional de la XXI Olímpiada Matemàtica. Foren seleccionats per participar a la fase estatal els següents alumnes: Ricardo Pérez Marco del Liceu Francès de Barcelona, Vicenç Companys Ferran del Col.legi Terraferma d'Alpicat i Josep R. Mallafré i Torra del Col.legi Claret de Barcelona. A tots ells la nostra enhorabona!.

Transcrivim tot seguit els enunciats dels problemes que els hi foren proposats a cada una de les fases d'aquesta Olimpíada.

Fase nacional:

1.- ¿Quins són els triangles que poden ser dividits per una recta en dos triangles semblants?

2.- La suma de dos nombres reals és igual a la suma dels seus quadrats.

a) ¿Quins valors pot tenir aquesta suma?

b) ¿Quins valors pot tenir cadascun d'aquests nombres?

c) ¿Poden ser iguals aquests dos nombres?

d) Busqueu el màxim de la diferència d'aquests dos nombres.

3.- Resolgueu l'equació $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

4.- Demostreu que tot triangle pot subdividir-se en triangles acutangles.

5.- Tres nombres diferents estan en progressió aritmètica i els seus quadrats estan en progressió geomètrica. Calculeu la