Llibre Blanc de la recerca matemàtica a Catalunya (2000-2009)

6. Articles sobre la recerca matemàtica a Catalunya

6.10. La recerca en sistemes dinàmics a Catalunya

Amadeu Delshams Valdés

Els sistemes dinàmics (SD, d'ara endavant) a Catalunya gaudeixen, actualment, d'una bona salut, fruit d'una labor continuada de consolidació portada a terme durant els últims trenta-cinc anys. Fins fa poc es trobaven repartits en tres grups pertanyents a les tres universitats de Barcelona on hi ha estudis de matemàtiques, però en els darrers anys els grups que pertanyen a la Universitat de Lleida (UdL), de Girona (UdG) i a la Rovira i Virgili (URV, de Tarragona) han pres també un protagonisme rellevant. L'origen de la recerca en aquest tema es troba en el grup de la Universitat de Barcelona (UB), i més particularment en la figura d'en Carles Simó, que és qui en va realitzar una primera tesi, el 1974, més precisament sobre mecànica celeste, disciplina considerada com la mare «clàssica» dels SD, i qui en va organitzar el primer seminari regular, a partir del 1978, a la UB. En Carles Simó ha dirigit vint-i-cinc tesis, vint de les quals apareixen citades en el *Mathematics Genealogy Project* (*http://www.genealogy.ams.org*), en què es poden trobar més de noranta descendents «matemàtics» seus. Tot i que la recerca en col·laboració amb els seus primers deixebles va versar sobre temes diversos de mecànica celeste, de seguida es va produir en el grup una explosió cap a gairebé tots els temes que formen els SD, tot i que aquí, per raons d'espai, només tractarem els que ara per ara semblen més rellevants.

Pel que fa a l'estructura, el 1978 es va formar el grup inicial de la UB; al voltant del 1984, es va separar el grup de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), i des del 2001 hi ha fonamentalment quatre grups, si entenem per grup aquella unitat de recerca que gestiona els seus propis recursos, localitzats en quatre universitats: la UAB (*http://www.gsd.uab.cat*), la UB (*http://www.maia.ub.es/dsg*), la UdL (*http://www.ssd.udl.cat*) i la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) (*https://recerca.upc.edu/sd*). Els recercadors de SD de la UdG i URV no formen grups propis, sinó que apareixen integrats en algun d'aquests quatre grups. Per afinitat de temes, aquests grups apareixen clarament agrupats en dues parelles: UB-UPC i UAB-UdL, descendents dels grups inicials de la UB i la UAB. Cal afegir aquí que l'estructura i les directrius del Pla Nacional de R+D+I, i també les pràctiques administratives usuals dels centres, perjudiquen l'existència de grups multiuniversitaris, i això provoca que la gran majoria de grups de recerca espanyols estiguin associats a llurs universitats, i gestionen, així, de manera autònoma, llurs projectes, actualment a través del Ministeri de Ciència i Innovació (MICINN). Pel que fa a l'organització en l'àmbit nacional, cada un dels quatre grups està reconegut com a *grup de recerca consolidat*. Aquesta divisió en grups cal considerar-la com una primera aproximació, ja que no és estanca sinó ben dinàmica, conseqüència dels múltiples transvasaments i estabilitzacions de personal que s'han anat produint com a resultat de diversos concursos de places docents i de recerca.

Quantitativament, el grup de SD de la UAB conté uns divuit doctors i sis no doctors; el de la UB, uns divuit doctors i uns nou no doctors; el de la UdL, uns cinc doctors i un no doctor, i el de la UPC, uns vint doctors i sis no doctors. De nou, cal insistir que alguns d'aquests investigadors comparteixen la seva recerca entre més d'un grup de recerca. Estem parlant, així, de més de vuitanta recercadors en SD a Catalunya, uns seixanta dels quals són doctors, i més de vint estan en formació. Cal considerar aquestes xifres com a aproximades i també dinàmiques; tot i que la majoria de no doctors esdevenen doctors, no tots ells continuen la carrera acadèmica. També cal tenir en compte que hi ha altres grups a Catalunya que fan part de la recerca en SD, però en aquest article només ens hem concentrat en els grups que fonamenten gairebé tota la recerca en SD.

L'activitat de recerca portada a terme per tots aquests investigadors involucra molts altres recercadors del món de SD (una cerca ràpida a MathSciNet dóna més de dos-cents col·laboradors estrangers) i té, a més, un marcat caràcter interdisciplinari, tant dins de les matemàtiques com fora d'elles, amb ús i desenvolupament d'un espectre amplíssim d'eines i disciplines matemàtiques (com ara anàlisi funcional, regularitats *Cr*, Cω, Gevrey, estimació asimptòtica, topologia, geometria diferencial, teoria de nombres, teoria de grups, anàlisi i mètodes numèrics, manipulació simbòlica, *computer science*, complexitat, supercomputació, etcètera) i també l'aplicació a múltiples àrees externes. A continuació intentarem ressaltar els trets principals d'aquesta recerca en SD, de manera necessàriament breu, i afegirem, ocasionalment, alguna referència dins el text a algunes memòries o articles de revisió que continguin més informació.

L'estudi dels objectes invariants dels SD i de la dinàmica al seu voltant. Els SD, disciplina també coneguda com a *anàlisi global*, es diferencien de l'anàlisi local per l'interès a entendre globalment el retrat de fases d'un sistema per a un temps llarg d'evolució, i també la seva dependència respecte a paràmetres del sistema. La seva recerca porta de manera natural a l'estudi, localització i aproximació dels *objectes invariants* d'un sistema, els quals el vertebren i organitzen la dinàmica al seu voltant. Els objectes invariants més simples són els que tenen una dinàmica interna més simple, com ara els punts d'equilibri i les òrbites periòdiques.

Camps polinòmics al pla. Els camps vectorials no trivials i més simples són els camps al pla, en què les òrbites periòdiques aïllades s'anomenen *cicles límit*. Entre ells, els més fàcils d'escriure són els camps polinòmics al pla. Tot i la seva aparent simplicitat, un dels pocs problemes de Hilbert que encara resta obert és la segona part del problema 16, sobre la configuració i el màxim nombre de cicles límit que un sistema diferencial polinòmic pla pot tenir en funció del grau. A partir de les memòries relativament recents d'Écalle i Ilyashenko i la metodologia introduïda, s'han obtingut avenços molt importants, com la prova de la finitud del nombre de cicles límit d'un camp polinòmic al pla.

El grup de la UAB, juntament amb el de la UdL, és un grup capdavanter en les aportacions al problema 16 de Hilbert. Aquests dos grups han obtingut resultats importants sobre les possibles configuracions de cicles límit per a camps polinòmics generals (una descripció d'alguns d'aquests resultats es pot trobar en la memòria *Qualitative theory of planar differential systems*. Springer: Berlin, 2006) i també per a diverses classes d'equacions diferencials polinòmiques, com les equacions diferencials d'Abel, Liénard, i resultats de tipus local corresponents a pertorbacions de centres o sistemes hamiltonians (l'anomenat *problema 16 de Hilbert feble*), i fins i tot pertorbacions de gràfics, en què tot sovint és necessari utilitzar tècniques de pertorbació singular, en considerar sistemes de tipus *slow-fast*. Aquests problemes pertorbatius estan íntimament lligats als problemes de caracterització de centres i focus, l'anomenat *problema centre-focus*, en què també els grups de la UAB i UdL han fet múltiples aportacions en els últims anys, en funció de la degeneració del punt singular; hi han introduït noves eines, com ara l'invers del factor integrant, i han col·laborat amb els principals recercadors del camp.

Dinàmica combinatòria en dimensió baixa. Pel que fa a l'evolució, els SD poden ser continus, quan hi ha una variable temps sobre la qual evoluciona el sistema, típicament seguint una equació diferencial ordinària, o bé discrets, quan aquests temps només es mesuren al llarg d'una successió discreta indefinida, típicament equiespaiada. El sistemes discrets consisteixen, així, en la iteració d'un endomorfisme (molt sovint difeomorfisme, quan podem tirar també el temps cap enrere) sobre una varietat. L'aplicació de Poincaré és l'eina més habitual per a assignar un sistema discret a un de continu, amb l'avantatge addicional d'una reducció de la dimensió de l'espai de fases. Dins els sistemes discrets, els més simples són els de dimensió baixa, com per exemple els endomorfismes sobre conjunts unidimensionals tals com l'interval, el cercle o altres tipus de grafs unidimensionals. Tot i ser l'espai unidimensional, la dinàmica associada pot ser molt complicada, amb òrbites periòdiques de tots els períodes, òrbites denses, etcètera. L'estudi del tipus d'òrbites periòdiques que hi poden aparèixer, del nombre de rotació, de l'entropia i de la combinatòria involucrada ha estat portada a terme sobretot pel grup de la UAB, juntament amb investigadors de la URV i UdG, i es pot consultar al llibre *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*. World Scientific Pub., 2000, que és una de les referències estàndard sobre el tema de dinàmica combinatòria en dimensió baixa.

La teoria KAM. Tot i que els objectes invariants *atractors* o *repulsors* són els que mostren una dinàmica més simple al seu voltant, una altra cosa és trobar-ne la conca d'atracció o repulsió, i veure si aquesta és global, com, per exemple, establia la conjectura de Markus-Yamabe en determinades condicions. Un resultat remarcable dins del grup de la UAB va ser provar que era falsa per a camps polinòmics en dimensió 3 o superior (*Adv. Math.* 131, (1997), 453-457). Ara bé, els conjunts invariants atractors no poden existir en els sistemes conservatius de la mecànica clàssica, com els sistemes hamiltonians o lagrangians. Els objectes invariants més regulars en aquests sistemes conservatius són els tors invariants, que presenten una dinàmica interna donada per una freqüència constant. Per a la cerca pertorbativa d'aquests tors invariants existeix la teoria KAM (deguda a Kolmogorov, Arnold i Moser), uns del avanços clau del segle xx, basada en mètodes iteratius de tipus Newton. Actualment, la teoria KAM ha crescut fins a esdevenir una gran àrea. Un dels articles de revisió més consultats és «A tutorial on KAM theory». *Smooth ergodic theory and its applications*, p.175-292, Proc. Sympos: Pure Math., 69, AMS, 2001. Els grups de la UB i la UPC són reconeguts per la seva expertesa en aquest tema, no solament pels resultats de tipus teòric, sinó també de tipus numèric i aplicat, per a tors invariants, per exemple, del sistema solar.

La teoria KAM serveix per a provar l'existència global d'un conjunt de mesura positiva de tors invariants de sistemes hamiltonians quasiintegrables i, per tant, d'estabilitat per a la major part de trajectòries. Però la resta de trajectòries poden ser inestables i donar lloc a l'anomenada *difusió d'Arnold*, inestabilitat conjecturada per V. I. Arnold l'any 1964. Cal notar que l'exemple paradigmàtic de sistema quasiintegrable és el sistema solar, i no cal dir que la seva possible inestabilitat és un tema d'importància vital. Afortunadament, aquesta inestabilitat, en cas d'existir, seria per a temps molt grans, tal com es desprèn de la teoria de Nekhoroshev. Els grups de la UB i la UPC han aportat alguns dels resultats més rellevants d'aquest tema, tant sobre els estudis d'estabilitat eficient dels punts d'equilibri triangulars del problema restringit espacial de tres cossos —que es van originar en un article seminal publicat a *J. Differential Equations*,77 (1989), p. 167-198, i es van continuar millorant posteriorment dins dels dos grups—, com sobre l'existència de difusió d'Arnold en sistemes hamiltonians *a priori* inestables, en què la monografia publicada a *Mem. Amer. Math. Soc.* 179 (2006), núm. 844 n'és la referència estàndard, almenys pel que fa a mètodes geomètrics i, per tant, constructius.

La teoria KAM també s'utilitza per a provar l'existència de moviments quasiperiòdics a prop de trajectòries selectes. Per a poder veure tals sistemes com a hamiltonians quasiintegrables, cal donar una expressió del sistema en coordenades adequades, anomenada *forma normal*, en què la seva expressió sigui senzilla. Aquest procediment té l'origen en els desenvolupaments clàssics portats a terme pels astrònoms durant segles, sovint reemplaçant els camps originals per les seves mitjanes respecte al temps en coordenades adequades (la teoria de mitjanes o *averaging theory*). Més recentment, aquests desenvolupaments han estat implementats efectivament en els ordinadors, fins i tot per a possibles càlculs en computació paral·lela usant clústers d'ordinadors. Els grups de la UB i de la UPC tenen una gran tradició en aquests tipus de càlculs, sobretot tenint en compte llur aplicació en problemes reals d'astrodinàmica, amb algunes implementacions d'accés públic en *http://www.maia.ub.es/~angel/taylor/*.

El teorema KAM, en la versió de Moser, rep el nom de *teorema twist*,perquè cal que la freqüència del sistema integrable no sigui constant. Un tema de recerca fronterer és, per tant, la *teoria nontwist*, en la qual alguns dels primers resultats es van fer dins els grups de la UB i de la UPC i en la qual continuen essent capdavanters en dimensions altes.

Varietats invariants. Són varietats associades als objectes invariants ja esmentats (des de punts d'equilibri, òrbites periòdiques, tors invariants, fins a varietats invariants normalment hiperbòliques), que poden ser estables, inestables o centrals. L'estudi de la seva existència s'ha dut a terme de manera constructiva, sempre tenint en compte el possible càlcul numèric, pels grups de la UB i de la UPC. En particular, cal notar l'article seminal, «On the analytical and numerical approximation of invariant manifolds», *Les Méthodes Modernes de la Mécanique Céleste*, p. 285-329, Editions Frontieres, 1992, que contenia la metodologia més usada i que continua com una referència estàndard en el camp, i també resultats recents sobre els mètodes de parametrització de varietats invariants.

Fenòmens homoclínics. Els objectes invariants *atractors* o *repulsors* són els que mostren una dinàmica més simple al seu voltant, però per a conèixer la dinàmica global d'un sistema dinàmic, cal localitzar a més els objectes invariants anomenats objectes de tipus *sella* o (parcialment) *hiperbòlics*, els quals tenen associades alhora *varietats invariants estables i inestables*. Quan una varietat invariant inestable d'un objecte invariant i una d'estable, del mateix o d'un altre objecte invariant, s'intersequen, les trajectòries contingudes en aquesta intersecció s'anomenen *homoclíniques* o *heteroclíniques,* respectivament, segons la terminologia deguda a Poincaré, i són la principal causa dinàmica coneguda del moviment caòtic o *caos*, que consisteix en la dependència sensible respecte a condicions inicials: dues trajectòries que romanen properes durant un interval finit i gran de temps arriben eventualment a separar-se (durant un temps encara més gran).

Gairebé tots els grups catalans s'han distingit, des dels inicis, per la cerca i la localització de trajectòries tant homoclíniques com heteroclíniques, i per l'estudi de la dinàmica caòtica associada, que depèn de l'angle d'intersecció de les varietats invariants i de la distància entre elles. Per al seu càlcul, amb freqüència es pot aplicar la teoria de Melnikov, sobre la qual s'han fet contribucions rellevants, com el potencial de Melnikov per a sistemes hamiltonians o difeomorfismes simplèctics. Hi ha algunes obres que han tingut una gran rellevància, com la publicada a *Math. Ann*. 248 (1980), p. 153-184 i, en particular, les associades a efectes exponencialment petits. Aquests efectes exponencialment petits es produeixen, per exemple, quan hom considera hamiltonians completament integrables, és a dir, depenent només de variables d'acció, i se'ls afegeix una pertorbació petita, mesurada per un paràmetre petit (ε és el nom paradigmàtic dels paràmetres petits en el món dels matemàtics). En aquests casos, la pertorbació pot donar lloc a objectes feblement hiperbòlics, en el sentit que la hiperbolicitat ve mesurada per una potència de ε, i l'angle o distància entre les varietats invariants estable i inestable associades és exponencialment petit respecte a ε. En aquest fenomen de l'escissió exponencialment petita de separatrius, els grups de la UB i de la UPC han estat un dels grups líders, des de l'obtenció de fites i expressions asimptòtiques curoses per a l'escissió exponencialment petita de separatrius, tant de difeomorfismes del pla com d'equacions diferencials ordinàries del pla pertorbades periòdicament i quasiperiòdicament, fins a hamiltonians quasiintegrables, en què els exponents que apareixen en el potencial de Melnikov contenen petits divisors. Per a un article de revisió, es pot consultar *Homoclinic orbits to invariant tori in Hamiltonian systems*, IMA Vol. Math. Appl., 122, Springer, 2001. Una eina recentment incorporada que ha començat a donar els primers fruits és la ressurgència i el *complex matching*, que es poden trobar detallades en l'article de revisió «Two examples of resurgence. Analyzable functions and applications», *Contemp. Math.*, 373, 2005.

Bifurcacions i desplegaments. De manera natural, els SD depenen de paràmetres, i els valors dels paràmetres per als quals es produeix un canvi en el comportament de l'espai de fases s'anomenen *valors de bifurcació*. Els canvis poden ser de tipus local, al voltant d'un objecte invariant simple, com un punt d'equilibri o una òrbita periòdica, o pel contrari, globals, al llarg de trajectòries no pròximes a un únic objecte invariant. L'estudi de les bifurcacions locals es porta a terme sovint amb l'ajut de desplegaments i de les maneres normals ja esmentades, usades com a aproximacions simples de les equacions diferencials del sistema dinàmic prop d'un objecte invariant. L'estudi de bifurcacions locals per a equacions periòdiques i quasiperiòdiques de tipus Hill s'ha portat a terme en el si del grup de la UB. Una descripció profunda d'un model representatiu d'aplicació de retorn prop de bifurcació homoclínica es pot trobar a «Towards global models near homoclinic tangencies of dissipative diffeomorphisms». *Nonlinearity*, 11 (1998), p. 667-770.

Integrabilitat i no integrabilitat. Els SD més senzills són els integrables, que, en poques paraules, gaudeixen de prou constants del moviment, anomenades *integrals primeres*, per tal de determinar qualsevol trajectòria del sistema en qüestió simplement assignant valors a aquestes integrals primeres. Molt sovint, l'existència d'aquestes integrals primeres porta a expressions analítiques explícites per a les trajectòries (llevat d'inversió de funcions i quadratures). Dins els sistemes hamiltonians amb *n* graus de llibertat, els sistemes integrables són els que posseeixen *n* integrals primeres independents en involució respecte al seu parèntesi de Poisson. Un resultat clàssic de Liouville i Arnold mostra que en tals sistemes, sota condicions de compacitat de la intersecció d'hipersuperfícies de nivell de les integrals primeres, es poden introduir coordenades acció-angle, en les quals el hamiltonià només depèn dels moments, anomenats, en aquest cas, *accions*. Els hamiltonians pertorbats d'aquests hamiltonians integrables són els que es poden estudiar directament per la teoria KAM. Per tant, la comprovació que un sistema hamiltonià concret és integrable o no, a part de ser de gran interès per si mateix, és de gran importància en considerar, a més, llurs pertorbacions.

Una teoria recent desenvolupada a la UB i a la UPC és la teoria de Morales-Ramis, basada en la utilització de la teoria de Galois diferencial per a estudiar les equacions variacionals sobre trajectòries conegudes concretes de sistemes hamiltonians. L'estudi de la no-integrabilitat a prop de solucions concretes té els orígens en treballs de Kovalevskaya i Liapunov, i més recentment en la teoria de Ziglin, i ha permès caracteritzar un munt de sistemes no integrables. La incorporació de la teoria de Galois diferencial es va originar en el si dels grups de la UB i de la UPC, i apareix desenvolupada en la memòria *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Mathematics, 179. Birkhäuser, 1999. Ha estat generalitzada recentment a equacions variacionals de qualsevol ordre, i aplicada a hamiltonians molt famosos com el d'Hénon-Heiles, el de *n* cossos, i molts més, i ha donat clarament una posició de lideratge als grups de la UB i de la UPC.

La integrabilitat dins de les equacions diferencials ordinàries pot ser de diferents tipus, depenent del tipus d'integral primera admesa, com per exemple la integrabilitat Darboux, que té lloc quan la integrabilitat és conseqüència de l'existència d'un nombre prou gran d'objectes invariants simples, sovint corbes algebraiques, i aleshores la integral primera és expressable depenent de les funcions elementals conegudes. Els grups de la UAB i de la UdL han obtingut resultats remarcables sobre la integrabilitat de sistemes diferencials del pla, com per exemple els publicats a *J. Differential Equations,* 157 (1999), p. 163-182, que recentment han estat generalitzats a dimensió arbitrària en el cas de sistemes diferencials polinòmics. Per a un article de revisió sobre els resultats d'integrabilitat per a camps polinòmics al pla, hom pot consultar el llibre «Integrability of polynomial differential systems. Handbook of Differential Equations», *Handbook of Differential Equations*, Elsevier: NorthHolland, 2003. La relació entre els diversos tipus d'integrabilitat roman encara oberta, tot i que últimament hi ha un projecte comú entre els grups de la UAB i de la UPC per a intentar relacionar-les.

La integrabilitat de SD, per exemple mitjançant la integració per quadratures, no es limita només als sistemes hamiltonians, i així hom pot considerar altres tipus de sistemes com ja s'ha mencionat per al cas d'integrabilitat Darboux, tals com sistemes discrets i sistemes no holònoms, alguns detalls dels quals es poden trobar en la memòria *A Memoir on Integrable Systems.* Springer: Heidelberg-Berlín, 2010.

Computació simbòlica, diferenciació automàtica i llurs aplicacions. Tal com ja s'ha mencionat, és molt important tenir en compte que la descripció de l'espai de fases d'un sistema dinàmic passa sovint per una exploració i localització d'objectes invariants o fites en l'espai de fases, de llur estabilitat, i de les possibles trajectòries que uneixen diversos objectes inestables (típicament de tipus sella). Els grups de la UB i de la UPC han portat a terme el càlcul numèric d'aquests objectes invariants i llurs connexions, tant en sistemes teòrics (o «acadèmics») com en sistemes reals, com els que provenen de l'astrodinàmica. En particular, la simulació de SD continus està basada en la integració numèrica d'equacions diferencials ordinàries, i molt sovint amb un nombre considerable de dígits útils, com succeeix en el cas de detecció de fenòmens exponencialment petits respecte a un paràmetre petit ε. Recentment, dins el grup de la UB s'ha portat a terme una nova i molt eficient implementació del clàssic *mètode numèric de Taylor*, però d'orde elevat i amb ajut de diferenciació automàtica, que sembla un mètode imbatible quan requereix utilitzar aritmètica d'alta precisió. La primera implementació apareix a «Global Dynamics and Fast Indicators», *Global Analysis of Dynamical Systems*, p. 373-389. Bristol: IOP Pub., 2001, i actualment hi ha una implementació anomenada, simplement, *taylor* a l'abast de qualsevol usuari a *http://www.maia.ub.es/~angel/taylor/*, que a més pot facilitar molt els càlculs amb les costoses equacions variacionals d'ordre arbitrari. Aquests mètodes de Taylor han començat a ser usats per un ventall cada cop més ampli d'investigadors que persegueixen càlculs amb múltiple precisió.

Un altre vessant molt important del càlcul és la utilització cada cop més creixent de clústers o ordinadors en paral·lel. Tot i que l'estàndard en els clústers és la utilització dels paquets d'àlgebra lineal com l'*scalapack*, tant el grup de la UB com el de la UPC gestionen els seus clústers (*hidra* i *eixam*), i també han desenvolupat algorismes per al càlcul paral·lel de tors invariants KAM i formes normals.

Sistemes triangulars o *skew product*. Són un tipus particular de SD, definits sobre un cilindre o espai fibrat, en què típicament la base és un tor amb dinàmica pròpia (per exemple, en un sistema discret, de translació amb freqüència fixa), i la dinàmica sobre les fibres ve influenciada per la dinàmica interna de la base. En sistemes continus, l'exemple clàssic vindria donat per equacions diferencials ordinàries no autònomes, amb dependència quasiperiòdica respecte al temps. Aquests sistemes estan íntimament lligats a problemes espectrals per a operadors rellevants, com els de Schrödinger amb potencial quasiperiòdic, tant continu com discret. Dins dels grups de la UB i la UPC hi ha diversos treballs rellevants sobre problemes espectrals usant mètodes de SD, i destaca entre ells la resolució del problema dels deu Martinis i els estudis sobre la reductibilitat d'aquests sistemes i la fractalització i bifurcacions de llurs corbes invariants. La recerca per a establir l'existència o no d'atractors no caòtics estranys (ANCE), que en general són atractors no diferenciables amb una dinàmica interna no caòtica, és a dir, sense dependència sensitiva respecte a condicions inicials, va començar no fa gaire en els grups de les tres universitats de l'àrea de Barcelona. Cal dir aquí que aquest tema va ser llançat durant la creació de la xarxa espanyola DANCE (dinàmica, atractors, nolinealitat, caos i estabilitat), que agrupa pràcticament tot l'espectre espanyol de SD, i en el qual els grups catalans han estat capdavanters, tant en la creació com en la coordinació.

Sistemes diferenciables a trossos. Alguns sistemes mecànics o elèctrics presenten discontinuïtats en llur modelatge. Aquests sistemes, fins i tot en el cas de ser lineals a trossos, presenten ja pràcticament tots els comportaments complicats que tenen lloc en els sistemes regulars, però sovint el seu càlcul és més fàcil i tenen aplicacions directes en teoria de control no lineal. El grup de la UAB ha obtingut diversos resultats remarcables sobre el nombre i la localització dels cicles límit en sistemes polinòmics a trossos amb dues o tres zones.

Dinàmica complexa. Tot i que els primers resultats sobre iteració de funcions holomorfes del pla complex provenen de l'estudi del mètode de Newton per a trobar zeros de polinomis, van ser P. Fatou i G. Julia, al començament del segle xx, els que van donar un primer impuls a la dinàmica complexa en introduir, i estudiar, el conjunt estable (o de Fatou) i el conjunt caòtic (o de Julia). Després de mig segle de molt poca activitat, no és fins al darrer terç del segle passat, amb el descobriment del conjunt de Mandelbrot i l'estudi de la família quadràtica, quan succeeix un altre impuls definitiu a l'estudi dels SD en el pla complex o superfícies de Riemann.

A Catalunya, un grup de recercadors de la UB i de la URV han treballat en aquesta línia des de mitjan dels anys noranta. El seu treball està centrat en l'estudi de famílies de funcions enteres (o meromorfes) del pla complex, com poden ser, entre d'altres, la família exponencial o la família estàndard, així com la dinàmica del mètode de Newton per a funcions enteres. Els resultats més rellevants fan referència a les propietats topològiques del conjunt de Julia (anells de Herman a la família estàndard, punts de Misiurewicz a la família exponencial complexa, classificació dels dominis de Baker, l'estudi de la frontera dels discs de Siegel i la connectivitat del conjunt de Julia per a funcions meromorfes) i a l'estudi del pla de paràmetres (components hiperbòliques per a la família exponencial, zones de captura de famílies de funcions enteres amb, almenys, un grau de llibertat, i estudi dels *limbs* del conjunt de Mandelbrot). Les eines específiques més utilitzades són la cirurgia quasiconforme, la dinàmica simbòlica i les pròpies de l'anàlisi complexa.

Mecànica celeste. Tal com ja s'ha dit, és la «mare» dels SD. L'estudi del moviment dels cossos del sistema solar i de la volta celeste, i més abstractament el problema de *n* cossos, ha estat sempre un problema fonamental per a l'home. Tots els tipus possibles de moviments apareixen a la mecànica celeste, començant per les famílies d'òrbites periòdiques, que, segons Poincaré, són fonamentals per a entendre la dinàmica; entre elles, les més simples són les d'equilibri relatiu associades a configuracions centrals. Gairebé tots els grups catalans de SD es dediquen, amb més o menys implicació, a treballar en aquest tema, bé resseguint famílies d'òrbites periòdiques, bé estudiant configuracions centrals, o bé cercant-hi moviment caòtic, estabilitat i inestabilitat, i obtenen molts dels resultats més punters en el tema, que de fet han anat apareixent en pràcticament tots el altres apartats ja tractats. Per citar només un de molt rellevant obtingut recentment en el si del grup de la UB, esmentem la descoberta de *coreografies* del problema de *n* cossos, que són òrbites periòdiques descrites per masses iguals, de manera que totes elles descriuen la mateixa trajectòria geomètrica.

L'**astrodinàmica** es dirigeix a l'anàlisi de missions en relació amb el moviment dels astres, o prop d'ells. Els grups de les tres universitats de Barcelona han estat o estan involucrades en missions (*SOHO*, *Génesis*, *Terrestrial Planets Finder*, *Petit Grand Tour*, etcètera) per a diferents agències espacials, com la NASA o l'ESA, i també col·laboren amb diverses empreses, com Deimos Space SA o Alcatel Space SA. La principal peculiaritat dels grups de Barcelona consisteix en l'ús profund de la teoria de SD per a l'anàlisi de missions espacials, començant per localitzar els objectes invariants simples (òrbites periòdiques, tors invariants) com a fites de les trajectòries nominals, al mateix temps que llurs connexions per a obtenir transferències d'òrbites, típicament amb molt poc cost energètic.

El problema de transferències entre òrbites és un tema clàssic en el qual els grups de la UB, UPC i UAB utilitzen primordialment les varietats invariants de diversos objectes invariants del sistema solar, com per exemple les òrbites de libració. Cal destacar la memòria de quatre volums de C. Simó i coautors *Dynamics and mission design near libration points.* Vol. i-iv. World Scientific Pub., 2001, que recull les eines dissenyades per a la missió espacial SOHO, que s'han convertit en referència estàndard en el tema des que es va escriure, molt anterior a la data en què es va publicar. La seva utilització s'està portant a terme actualment pels equips de la UB i la UPC en diverses missions dins el marc general del càlcul de la *interplanetary super-highway* i de formacions de satèl·lits lligats, i també en altres aplicacions com la *Solar Sailing*, que és una tècnica de navegació espacial que consisteix a aprofitar la pressió de la radiació solar sobre una «vela» per tal d'impulsar un petit satèl·lit.

Neurociència computacional. Al llarg dels últims anys, el grup de la UPC ha combinat la recerca en la teoria de SD amb la seva aplicació a la neurociència, amb una forta cooperació amb experimentalistes. Qüestions de l'activitat en el cervell com el comportament col·lectiu de conjunts heterogenis de neurones, estimació de conductàncies per a desvelar l'arquitectura cortical, la plasticitat sinàptica o la percepció biestable es troben dins els temes d'estudi.

Finalment, totes les eines esmentades de SD s'estan aplicant actualment en altres camps, com problemes de climatologia, mecànica de fluids i dinàmica reactiva en química, que per falta d'espai no podem descriure, però alguns de les quals podrien esdevenir en el futur temes de gran importància i rellevància dins dels grups de SD.

Aquesta descripció, forçosament breu, d'alguns dels molts temes de recerca estudiats pels grups que s'ha anant citant dóna, a més, una bona idea sobre la importància de Catalunya en els SD. Catalunya és una terra de constants intercanvis científics en SD, tant en forma de visites i col·laboracions posteriors de membres de pràcticament tots els grups de recerca de SD, com en forma d'organització de congressos, escoles, seminaris i programes de recerca i participacions en xarxes europees, i també de pertinença de recercadors dels grups catalans en els comitès editorials de les principals revistes científiques sobre SD. Per a una informació més detallada sobre aquests punts i per conèixer més detalls sobre la recerca desenvolupada en SD a Catalunya, el lector pot consultar les pàgines web dels grups ja esmentades.

Equip de redacció: Manuel Castellet, Joan del Castillo, Xavier Jarque, Margarida Mitjana

Institut d'Estudis Catalans

Institut d'Estudis Catalans. Carrer del Carme, 47 ; 08001 Barcelona.
Telèfon +34 932 701 620. Fax +34 932 701 180. *informacio@iec.cat* - Informació legal