

✓ Llibre Blanc

de la recerca matemàtica a Catalunya (2000-2009)

6. Articles sobre la recerca matemàtica a Catalunya

6.2. La recerca en anàlisi matemàtica a Catalunya

Joaquim Ortega Cerdà

L'espectre de l'anàlisi en què es treballa a Catalunya és molt ampli. Hi ha investigadors que fan recerca en anàlisi funcional, anàlisi real, anàlisi harmònica, anàlisi complexa, teoria de l'aproximació, teoria del potencial i també en camps fronterers com la teoria geomètrica de la mesura i d'interacció entre probabilitat i anàlisi. No abordarem la recerca en anàlisi que es fa a Catalunya en equacions, en derivades parcials ni en sistemes dinàmics, ja que aquestes línies es descriuen en altres reports.

El grup d'analistes és molt nombrós, supera les trenta persones però es troba concentrat essencialment en només dues universitats —la Universitat de Barcelona i la Universitat Autònoma de Barcelona— i una institució de recerca, l'ICREA. Un dels actius del grup d'analistes és que, tot i l'ampli ventall de temes en què treballa i la mida del grup, ha mantingut des de fa dècades un seminari setmanal en comú, de manera que hi ha un intercanvi científic freqüent entre els investigadors que treballen en les diverses línies de recerca.

Per descriure la recerca que es fa en anàlisi a Catalunya recentment (en els darrers deu anys aproximadament), agruparem els problemes en diverses línies. Estan estructurades temàticament, però és clar que no totes són del mateix pes ni han tingut desenvolupaments comparables.

Farem, doncs, un recull de l'activitat de recerca que duen a terme més d'una trentena d' investigadors. És del tot impossible mencionar en un espai raonable tots els treballs realitzats. Per aquesta raó, donarem una visió panoràmica i molt parcial dels problemes en anàlisi en els quals s'ha contribuït des de Catalunya.

Anàlisi harmònica i integrals singulars

Una de les eines fonamentals en anàlisi harmònica són les integrals singulars. Són un objecte d'estudi clàssic; fins als anys noranta, la teoria —fonamentada per Calderon i Zygmund— estava molt ben entesa en el cas que la mesura subjacent fos regular (la condició tècnica és la de doblant), com per exemple en el cas de la mesura de Lebesgue. Això feia que la teoria no es pogués estendre a conjunts, per exemple rectificables però no regulars, en què la mesura natural subjacent és no doblant.

En una sèrie de treballs de gran impacte fets per matemàtics catalans sobre, essencialment, la transformada de Cauchy es va trencar aquesta barrera i, després, amb les contribucions també de Volberg, Nazarov i Treil es va reconstruir aquesta teoria en un marc molt més general. És, conjuntament amb l'extensió multilíneal de les integrals singulars, un dels grans avenços en l'anàlisi harmònica dels darrers anys, que ha estat en gran part impulsat des de Catalunya.

Anàlisi i teoria del senyal

L'anàlisi de Fourier és la clau de volta dels fonaments matemàtics de la teoria del senyal. Un dels problemes bàsics d'aquesta teoria es troba en el procés de digitalització de senyals analògics. Aquest problema està íntimament connectat amb problemes d'unicitat i de mostreig de funcions analítiques, ja que els models més habituals per a descriure senyals de banda limitada es basen en espais de funcions enteres. De manera simètrica, la conversió de senyals discrets en continus requereix l'estudi de les successions d'interpolació dels espais de funcions que modelitzen el senyal. La situació òptima es dona quan tenim simultàniament successions d'interpolació i unicitat.

En el llenguatge de l'anàlisi funcional les successions de mostreig corresponen a *frames* i les d'interpolació, a bases de Riesz; i, en tots dos casos, les successions defineixen mesures de Carleson. Aquests objectes bàsics que formen els fonaments matemàtics de la teoria del senyal han estat extensivament estudiats pel grup de matemàtics a Catalunya. Són importants de destacar les descripcions de successions de mostreig i interpolació en espais com el de Paley-Wiener o en els espais de Fock amb pesos i l'estudi en profunditat de les mesures de Carleson en diversos espais de funcions en una i varies variables.

Els problemes de completesa en la representació de senyals esdevenen de manera immediata problemes de l'estudi de zeros en espais de funcions holomorfs o harmòniques. Aquests problemes han estat abordats mitjançant tècniques de funcions quasianalítiques.

Tots aquests problemes han estat tractats també en contextos més sofisticats, en què hom reemplaça la transformada de Fourier per la transformada de Fourier en finestra o la transformada en onetes.

Teoria geomètrica de la mesura

L'interès inicial del grup de matemàtics catalans per l'estudi de la mida i l'estructura de conjunts s'origina en la descripció de conjunts excepcionals per a espais de funcions holomorfs i harmòniques i de teoremes d'aproximació. Un problema central, molt clàssic en aquesta àrea, és el problema de Painlevé de descriure les singularitats evitables de les funcions holomorfs i acotades. Aquests conjunts són els de capacitat analítica nul·la. El problema central és donar descripcions geomètriques de la capacitat analítica.

Els avenços fonamentals que s'han produït en aquesta àrea a casa nostra han estat la demostració que la capacitat és subadditiva i la invariància *bilipschitz* d'aquesta quantitat. Aquests resultats han estat d'un gran impacte en la comunitat matemàtica. Van requerir la introducció de nous conceptes clau, com la curvatura de mesures i l'estudi de la relació entre la capacitat analítica, l'acotació en L^2 de la mesura de transformada de Cauchy i l'estudi de la rectificabilitat de conjunts. Darrerament, tota la tecnologia desenvolupada en aquesta àrea s'ha encarat a l'estudi de la distorsió dels conjunts i, més concretament, de la mesura de Hausdorff per aplicacions quasiconformes. Aquests són treballs molt recents que permeten, per exemple, estudiar els conjunts evitables per aplicacions quasiconformes i acotades amb una distorsió fixada.

Anàlisi real i funcional

Hi ha també una línia de recerca molt activa en anàlisi real i funcional. Només mencionarem aquí els problemes en què hi ha hagut una contribució substancial dels matemàtics catalans. Un dels temes que s'han

abordat en aquesta línia al llarg dels darrers anys és l'estudi de geometria d'espais de Banach. Més concretament, s'ha treballat en espais d'interpolació i en les propietats dels operadors entre els espais interpolats, com per exemple la compacitat. Un altre terreny en què s'han obtingut resultats fructífers és en els problemes d'extrapolació, en què algunes desigualtats que es coneixen per una família d'espais s'estenen a altres.

També tenim molt bons especialistes en espais de Lorentz. L'estudi de les propietats d'aquests espais amb pesos ha estat estès a espais de funcions invariants per reordenaments. Un dels operadors que juga un paper bàsic en la teoria de la interpolació és l'operador de Hardy. Per tant, és natural estudiar aquest operador *per se*. S'ha estudiat en profunditat en espais de funcions invariants per reordenaments. També s'han millorat desigualtats de Hardy per a funcions monòtones. Una altra tècnica clàssica que ha estat refinada són els resultats de transferència, en què algunes acotacions d'operadors en espais de funcions definides en un grup es poden transferir a acotacions en altres grups.

Anàlisi complexa

Alguns dels problemes centrals en què s'ha treballat a Catalunya és l'estudi de les propietats algebraïques i analítiques d'espais de funcions d'una i varies variables complexes. A tall d'exemple, el teorema de Carleson caracteritza quan una n -tupla de funcions holomorfes i acotades al disc és unimodular. Això dona informació sobre l'espectre de l'àlgebra de funcions. És del tot natural considerar aquest mateix problema en altres àlgebres de funcions holomorfes o, fins i tot, en el cas d'espais de Banach de funcions. En aquest darrer cas, un primer problema per abordar és la descripció de l'espai de multiplicadors puntuals. Totes aquestes qüestions han estat tractades per funcions d'una variable al disc i per funcions de varies variables a la bola.

Per abordar tots aquests problemes, ha estat de vital importància l'experiència en la manipulació i el disseny de nuclis integrals per a resoldre l'equació de Cauchy-Riemann no homogènia. Aquesta és una àrea en què tenim bons especialistes, tot i que darrerament l'estudi *per se* dels nuclis integrals ha passat a un segon pla.

Un altre exemple de la classe de problemes estudiats a Catalunya és la identificació de la regularitat de les funcions holomorfes a partir d'una informació parcial, per exemple la regularitat del seu mòdul. També hi ha una línia de recerca en teoria de l'aproximació per funcions polianalítiques i del comportament fi de la representació conforme.

Finalment, en molts dels problemes de teoria de funcions que hem abordat acaben apareixent operadors de Toeplitz o Hankel, que són els anàlegs infinit-dimensionals de les matrius amb el mateix nom. És d'interès, doncs, l'estudi de propietats d'aquests operadors, com l'acotació i l'estimació de la norma d'aquests operadors a partir de les propietats del seu símbol. Aquests problemes estan molt lligats a l'estudi dels multiplicadors i les mesures de Carleson esmentats abans.

Teoria del potencial

Hi ha una relació directa i clàssica entre l'estudi de problemes de variable complexa i l'estudi de les funcions harmòniques i subharmòniques. Al seu torn, l'estudi d'aquestes funcions es pot abordar des d'un punt de vista analític o des d'un punt de vista probabilístic.

A final dels vuitanta, Makarov va demostrar una sèrie de resultats sobre el comportament de les aplicacions conformes i sobre propietats mètriques de la mesura harmònica com a conseqüència de resultats de martingales diàdiques. Aquestes tècniques han estat utilitzades per investigadors de casa nostra per a estudiar les propietats de regularitat de les mesures simètriques en una i varies variables.

També hem reinterpretat alguns dels resultats existents en teoria de funcions, com la descripció de successions d'interpolació i mostreig en termes del comportament de la mesura harmònica; això ha donat lloc, per exemple, a reformular algun d'aquests problemes en funció de la inevitabilitat de col·lisió d'un moviment brownià amb una col·lecció d'obstacles esfèrics.

Finalment, una altra problema que s'ha abordat a Catalunya és l'estudi dels potencials no lineals. Aquest potencials de Wolff no lineals apareixen en un treball de Hedberg i Wolff. Estan íntimament relacionats amb les desigualtats de traça. Aquestes desigualtats són l'estudi d'estimacions entre espais de Lebesgue amb pesos d'operadors integrals amb nuclis positius radials. Per a abordar aquests problemes, s'ha hagut de generalitzar la desigualtat de Wolff i, en alguns casos, utilitzar models diàdics i resultats d'interpolació per espais de Littlewood-Paley discrets.

També vull mencionar breument algunes de les mancances temàtiques. Al meu parer, no hi ha prou gent treballant de manera regular en geometria complexa i segurament no interactuem prou amb grups propers en equacions en derivades parcials.

D'on venim? Les influències externes

No donarem un recull de quina ha estat la història de l'anàlisi matemàtica a Catalunya. Qui hi estigui interessat pot llegir «La evolució del anàlisi matemàtic en España», de Joan Cerdà, article publicat a la *Gaceta de la Real Sociedad Matemàtica Española*, volum 12, número 3 (2009). S'hi descriu en particular la història de l'anàlisi matemàtica a Catalunya —des de figures puntuals i destacades, com Sunyer i Balaguer, que malauradament no van tenir un gran impacte sobre la nostra comunitat acadèmica actual— fins als nostres dies.

Farem, en canvi, un recull sobre quines són les influències externes d'arreu del món en la recerca que es fa a casa nostra. Les més destacades, al meu parer, són les següents:

Les matemàtiques del nord

1. La principal àrea de recerca en matemàtiques als països nòrdics és l'anàlisi. Tenen una fortíssima tradició amb Beurling, Carleman, Lindelof, Mittag-Leffler i Nevanlinna, que continua fins avui amb figures com Carleson, Garding i Hormander. És segurament un dels pols mundials de l'anàlisi matemàtica.

Si ens centrem en Finlàndia, hi ha dues àrees en què la influència en la recerca a Catalunya ha estat molt gran. Una és la teoria geomètrica de la mesura, per mitjà de Mattila, que ha fet llargues estades a Catalunya i ha col·laborat amb matemàtics locals. L'altre camp és segurament el de la teoria d'aplicacions quasiconformes, amb Astala i Koskela com a punts d'enllaç amb matemàtics catalans. K. Astala, per exemple, va estudiar la distorsió de la mesura de Hausdorff per aplicacions quasiconformes. Aquest estudi ha estat portat a casos límit a Catalunya. També s'ha abordat la relació entre aplicacions quasiconformes i integrals singulars.

A Suècia hi ha un bon nombre de matemàtics de primera línia que treballen en varies variables complexes, com Andersson, Berndtsson i Passare. La influència d'aquest grup a Barcelona ha estat molt gran. Molts dels problemes que els darrers vint anys s'han treballat a Barcelona en anàlisi complexa en varies variables han estat influenciats pel grup de Göteborg. En aquest sentit, l'evolució científica a Barcelona i a Göteborg, fins fa poc, ha estat paral·lela: si fins als anys setanta l'estudi de les funcions holomorfes de varies variables

tenien un caire algebraic, es va produir als vuitanta una evolució cap a mètodes explícits de solucions de problemes clàssics mitjançant nuclis integrals. En aquest punt, els suecs van ser pioners i, a Barcelona, hi va haver un bon grapat de treballs en aquesta direcció, i treballs en col·laboració. Cap als noranta es va retornar als mètodes clàssics d'estimacions *a priori* aplicats a problemes de teoria de funcions, com el problema de la corona o els problemes d'interpolació. Altre cop, tant a Barcelona com a Göteborg es va avançar en aquesta línia. Darrerament hi ha una divergència més gran d'interessos, els problemes clàssics de varies variables semblen més esgotats o en resten els més difícils. Un altre grup amb influència a Catalunya és el de Peetre i els seus col·laboradors en problemes d'interpolació d'espais en anàlisi funcional.

Finalment, amb noruecs com Seip i Stray i alguns dels seus estudiants i amb noruecs d'adopció com Lyubarskii i Ulanovskii hem mantingut cooperacions en algun cas de llarga durada i hem realitzat estades predoctorals i postdoctorals. La influència ha estat molt rellevant sobretot en problemes de la línia d'anàlisi complexa i de teoria del senyal.

L'escola russa

1. La influència més directa de l'escola russa ha estat la incorporació de tres investigadors en anàlisi en els grups de recerca locals, que han influenciat els problemes i mètodes que tractem. A part d'aquesta influència de primera mà, hi ha hagut nombroses col·laboracions tant amb matemàtics de la escola de Vitushkin, a Moscou, com d'un altre centre molt important a Sant Petersburg, on Havin i els seus deixebles han tingut un impacte molt gran en la comunitat matemàtica internacional i també a casa nostra. El grup amb qui hem tingut més treballs en col·laboració són els matemàtics de l'antiga Unió Soviètica, avui en diàspora, com Borichev, Korenblum, Olevskii, Verbitsky, etc.

Estats Units

1. A Saint Louis hi ha un grup d'analistes, entre d'altres Weiss i Taibleson, que va influir de manera notable en molts analistes a Espanya i també ha tingut el seu impacte a Catalunya. De fet, Weiss és doctor *honoris causa* per la Universitat de Barcelona. Una altra universitat americana amb molta influència a Catalunya és a Madison, Wisconsin, on molts hem realitzat estades postdoctorals. Ahern, Nagel i Rudin són segurament les influències més notables. Finalment, Garnett, a Los Angeles, i Milman, a Florida, han estat col·laboradors regulars amb matemàtics catalans.

França

1. Al llarg de molts anys mantenim una relació amb matemàtics francesos, amb qui fem una trobada conjunta almenys un cop l'any des de fa dècades. Són sobretot matemàtics del sud de França: Amar, Charpentier, Dupain, Hartmann (a Bordeus) i Thomas (a Tolosa), però també hi ha col·laboracions amb matemàtics d'Orsay com Bonami, David i Aucher.

Obviament hi ha altres col·laboracions més puntuals amb matemàtics d'altres països com Alemanya, Irlanda o Polònia. Amb els matemàtics de la resta d'Espanya, la col·laboració no ha estat gaire abundant tot i la participació regular (i organització, de vegades) en trobades com els *Encuentros de Análisis Real y Complejo* i els congressos bianuals a El Escorial.

Visibilitat

La visibilitat del grup d'anàlisi en l'àmbit internacional és molt elevada. A tall d'exemple podem esmentar cinc articles publicats a *Annals of Mathematics* i dos a *Acta Mathematica*, les revistes segurament de més prestigi. També ha estat guardonat un membre amb el Premi Salem i amb el premi de la *European Mathematical Society* a joves investigadors, i dos més, amb la distinció a la recerca de la Generalitat de Catalunya.

Equip de redacció: Manuel Castellet, Joan del Castillo, Xavier Jarque, Margarida Mitjana



Institut d'Estudis Catalans. Carrer del Carme, 47 · 08001 Barcelona.
Telèfon +34 932 701 620. Fax +34 932 701 180. Informacio@iec.cat - [Informació legal](#)

Pàgines optimitzades per els navegadors Internet Explorer 8, Mozilla Firefox 3.6, Opera, Safari i Google Chrome